

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Кудымкарский лесотехнический техникум»

**Методические указания по выполнению
самостоятельной работы**

по учебной дисциплине ЕН 01 «Математика»

Специальность: 35.02.01 «Лесное и лесопарковое хозяйство»

2 курс

2016 год

РАССМОТРЕНО
на заседании ПЦК
общеобразовательных дисциплин
Протокол №____ от «__»_____ 2016

Председседатель_____

Автор-составитель- Л.Г.Дзюба, преподаватель математики

Методические указания по выполнению самостоятельной работы для студентов составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН 01Математика, разработанной по специальности:35.02.01 «Лесное и лесопарковое хозяйство».

Зарегистрировано:

№____ от «__»_____ 2016г.

Содержание

Предисловие	3
1. Требования ФГОС к результатам освоения основной профессиональной образовательной программы по дисциплине	4
2. Тематический план самостоятельной работы	5
3. Задания для самостоятельной работы	6
4. Список информационных источников	63

Предисловие

Методические указания по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине «Математика» предназначены для студентов 2 курса по специальности «Лесное и лесопарковое хозяйство»

Выполнение внеаудиторной самостоятельной работы является обязательной для каждого студента.

Самостоятельная внеаудиторная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- развития познавательных способностей и активности студентов, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. По математике используются следующие виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы-для овладения знаниями: чтение текста (учебника, дополнительной литературы), работа со словарями и справочниками, учебно-исследовательская работа, использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и Интернета; для закрепления и систематизации знаний: повторная работа над учебным материалом (учебника, дополнительной литературы, аудио- и видеозаписей), составление плана и алгоритма решения, составление таблиц для систематизации учебного материала, ответы на контрольные вопросы, подготовка сообщений к выступлению на уроке, конференции, подготовка сообщений, докладов, рефератов, тематических кроссвордов, презентаций.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Раздел 1. Математический анализ	Часы
Тема 1.1.Пределы и непрерывность	
Предел. Свойства пределов Предел. Вычисление пределов функции Вычисление пределов	4
Тема 1.2.Производная функции	
Производная. Правила дифференцирования Правила дифференцирования. Вычисление производной Производная. Вычисление производных тригонометрических функций Производная сложной функции. Дифференцирование	3
Тема 1.3.Приложение производной	
Исследование функции с помощью производной. Уравнение касательной к графику функции. Производная и дифференцирование Решение задач	4
Тема 1.4Интеграл	
Первообразная Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Определенный интеграл. Интегральное исчисление. Домашняя контрольная работа по теме «Интеграл и его приложения» Вычисление интегралов. Нахождение площади криволинейной трапеции Вычисление площади плоских фигур	5
Раздел 2. Аналитическая геометрия	
Тема 2.1Аналитическая геометрия на плоскости	
Метод координат на плоскости. Векторы на плоскости и в пространстве. Элементы аналитической геометрии на плоскости Кривые второго порядка Решение задач	2
Тема 2.2.Кривые второго порядка	
Аналитическая геометрия на плоскости Элементы аналитической геометрии на плоскости Кривые второго порядка (ГРАФИКИ)	1
Раздел 3. Теория вероятностей и математическая статистика	
Тема 3.1.Теория вероятностей	
Теория вероятностей Задачи теории вероятностей.	3
Тема 3.2.Математическая статистика	2
Решение задач Итоговая работа по математике	

24 часа

РАЗДЕЛ 1

ТЕМА 1.1. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Самостоятельная работа по теме «Предел. Свойства пределов»

Цель: - систематизация и закрепление полученных теоретических знаний по теме «Предел. Свойства пределов»;

Задание: 1. Письменно ответить на вопросы, используя учебник - Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования /М.И.Башмаков.-4-е изд., стер.-М. :Издательский центр «Академия»,2017.-256с.

Стр. 165

Критерии оценки: «5» - вопросы раскрыты полностью, точно обозначены основные понятия и формулы по теме; «4» - вопросы раскрыты, однако нет полного описания всех необходимых элементов; «3» - вопросы раскрыты не полно, присутствуют грубые ошибки, однако есть некоторое понимание раскрываемых понятий; «2» - ответы на вопросы отсутствуют или в целом не верны.

Методические указания: работа с литературой. Прочитай, выбери главное. Сформулируй ответ. Ответ должен быть четким и кратким, содержащим все основные характеристики описываемого понятия, категории.

Вопросы:

1. Дайте определение предела переменной величины. Перечислите, свойства пределов.
2. Как прочитать запись $\lim_a f(x) = b$? Дайте определение предела функции в точке.
3. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
4. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
5. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните основной метод раскрытия неопределенности ∞ / ∞
6. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные пределы

Форма работы: письменная работа в тетради

Самостоятельная работа по теме «Предел. Вычисление пределов функции»

Цель: закрепить навыки, полученные на занятии при решении упражнений; отработка техники вычисления пределов: сформировать умение производить вычисление пределов; научиться вычислять пределы функции с различными видами неопределенностей

Задание: вычислить пределы.

Критерии оценки: «5» верно выполнено 8 заданий;

«4» верно выполнено 6-7 заданий;

«3» верно выполнено 4-5 заданий;

«2» выполнено менее 4 заданий

Методические указания:

Техника вычисления пределов.

Пример №1. Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x}{3x - 3}$. Решение. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^3 + 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 - 3} = \frac{33}{6} = 10,5$.

Пример №2. Найти $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5}{3x - 12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5}{0} = \infty$.

Пример №3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+3x}{x^2+x} = \frac{0}{0}$ (неопределенность). Однако из этого не следует, что данная функция не имеет предела. Вынесем за скобки x и разделим числитель и знаменатель на x , что допустимо так как $x \neq 0$ до перехода к предельному значению. Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2+3)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3}{x+1} = 3.$$

Пример №4. Найти

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x^2+2-6}{2-2}}{0} = \frac{0}{0}$ (неопределенность). Разложим числитель на линейные множители $x^2 + x - 6 = 0$.

$$X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad X_1 = -3, \quad X_2 = 2$$

Следовательно, $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 5.$$

Пример №5. Найти $\lim_{x \rightarrow 12} \frac{\sqrt{x+4}-4}{x-12}$. При подстановки $x=12$ получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы избавиться от неопределенности, преобразуем данную функцию, умножив числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x+4} + 4$. $\lim_{x \rightarrow 12} \frac{(\sqrt{x+4}-4) \cdot (\sqrt{x+4}+4)}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)} = \lim_{x \rightarrow 12} \frac{x+4-16}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)} = \frac{1}{8}$

Пример №6. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{4x+5}$. Решение $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{4x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{\infty} = 0$.

Пример №7. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{7x+3}$. Решение $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{7x+3} = \frac{\infty}{\infty}$ (неопределенность). Преобразуем данную функцию, разделив почленно числитель и знаменатель на неизвестную в самой большой степени.

$$\text{степени. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{7x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x} + \frac{7}{x}}{\frac{7x}{x} + \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{1} + \frac{7}{x}}{\frac{7}{1} + \frac{3}{x}} = \frac{5}{7}.$$

Вычислить пределы:

Ход работы: 1) Подставить вместо « x » число, к которому стремится x . Если получилось число, то предел посчитан, если получилась неопределённость

$\left(\frac{0}{0}\right)$, (1^∞) , $(\infty \pm \infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$ и т.д., то

2) Воспользоваться способами раскрытия этих неопределённостей

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{11x^2 - 78x + 7}{2x^2 - 9x - 35};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{5x - 7};$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 4}{3x^2 - 2x + 5};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 3}{7x - 4};$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^2 - 2x + 5}{x^4 + 6x + 1}.$$

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение предела переменной величины.
2. Как прочитать запись: $\lim_a f(x) = b$? Дайте определение предела функции в точке.

РАЗДЕЛ 2

ТЕМА 2.1. ПРОИЗВОДНАЯ

Самостоятельная работа по теме

«Производная. Правила дифференцирования»

Цель: закрепить навыки, полученные на занятии, зная формулы дифференцирования элементарных функций

Задание: 1. Прочитай материал параграфов учебника:

«Производная функции», «Применение производных».

2. Запиши таблицы основных формул (стр180) и правил дифференцирования(стр177);

3. Разбери примеры с карточки 1 и реши сам (РС)

Литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования /М.И.Башмаков.-4-е изд., стер.-М. :Издательский центр «Академия»,2017.-256с.стр171-180

Критерии оценки: «5» выполнены все задания; «4» выполнены все задания, но есть недочеты в №3; «3» выполнены все задания, но есть не правильные ответы в №3; «2» выполнено менее половины заданий по карточке 1

Методические указания: работа с литературой. Прочитай, выбери главное. Сформулируй ответ. Ответ должен быть четким и кратким, содержащим все основные характеристики описываемого понятия, формулы, правила.

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$y = f(x)$	$y = f'(x)$	$y = f(x)$	$y = f'(x)$
$y = c \ (c - const)$	$y' = 0$	$y = ax + b$	$y' = a$
$y = x^2$	$y' = 2x$	$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = x^a$	$y' = ax^{a-1}$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$

Карточка 1

$$1. (C)' = 0, (x)' = 1, (x^2)' = 2x, (x^3)' = 3x^2, (x^p)' = px^{p-1}$$

$$(5)' = 0, (x^5)' = 5x^4, (x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}, (x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

P. C. (7)' =

$$(x^6)' =$$

$$(x^{-5})' =$$

$$(x^{\sqrt{3}})' =$$

$$2. (kx + b)' = k, ((kx + b)^p)' = kp(kx + b)^{p-1}$$

$$(2x + 3)' = 2, (-3x - 2)' = -3, ((-2x + 3)^3)' = -2 * 3 * (-2x + 3)^{3-1} = -6(-2x + 3)^2$$

$$((\frac{1}{2}x - 1)^2)' = \frac{1}{2} * 2 * (\frac{1}{2}x - 1)^{2-1} = (\frac{1}{2}x - 1)^1 = \frac{1}{2}x - 1$$

P. C. (5x - 2)' =

$$(-\frac{1}{2}x + 3)' =$$

$$((2x + 7)^3)' =$$

$$((\frac{3}{4}x - \frac{1}{2})^2)' =$$

$$((7x + 12)^7)' =$$

$$3. (Cf(x))' = C * f'(x), (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(4x^2)' = 4 * (x^2)' = 4 * 2x^{2-1} = 8x, (-3x^7)' = -3(x^7)' = -3 * 7x^{7-1} = -21x^6,$$

$$(x^4 + 3x^2 + 4)' = (x^4)' + 3 * (x^2)' + (4)' = 4x^{4-1} + 3 * 2x^{2-1} + 0 = 4x^3 + 6x$$

P. C. (3x^3)' =

$$(\frac{1}{2}x^4)' =$$

$$(7x^{15})' =$$

$$(x^3 + 2x)' =$$

$$(x^{-2} - 3x^5 + x^4 - 7)' =$$

$$(3x^7 + \frac{1}{2}x^4 - 11)' =$$

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы:

1. Кто является основателем теории дифференцирования?

2. Какие интересные исторические факты по производной тебе известны?

Самостоятельная работа по теме «Производная. Правила дифференцирования. Вычисление производной»

Цель: закрепить навыки вычисления производной функции.

Задание: составить задания теста. Необходимо, чтобы задание теста соответствовало одному из приведенных ответов. Ответы теста запишите в таблицу «Модельные ответы».

Методические указания: используй таблицы

ПРОИЗВОДНЫЕ

Таблица производных

№п/п	$y=f(x)$	$y'=f'(x)$
1	c	0
2	x	1
3	x^n	nx^{n-1}
4	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$\frac{1}{x^k}=x^{-k}$	$-kx^{-k-1}$
6	$\sin x$	$\cos x$
7	$\cos x$	$-\sin x$
8	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
9	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
10	e^x	e^x
11	a^x	$a^x \ln a$
12	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
13	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}$

Правила дифференцирования

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2. (uv)' = u'v + uv'$$

$$3. (cu)' = cu'$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$5. (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$6. (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Уравнение касательной:

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

Вариант 1

1. Найдите производную функции: $y= \dots$.
1) $12x^2$ 2) $12x$ 3) $4x^2$ 4) $12x^3$
2. Найдите производную функции $y= \dots$.
1) -5 2) 11 3) 6 4) $6x$
3. Найдите производную функции $y= \dots$.
1) $-16x$ 2) $-16x^2$ 3) $-16x^3$ 4) 16
4. Найдите производную функции $y= \dots$.
1) 1 2) $7x^2$ 3) $14x^2$ 4) 0
5. Найдите производную функции $y= \dots$.
1) 2) 3) 4)
6. Вычислите значение производной функции $y= \dots$ в точке $x_0=2$.
1) 10 2) 12 3) 8 4) 6
7. Найдите производную функции .
1) 2) 3) 4)
8. Вычислите значение производной функции $y= \dots$ в точке $x_0=4$.
1) 21 2) 24 3) 0 4) 3,5
9. Вычислите значение производной функции $y= \dots$.
В точке $x_0= \dots$.

Модельные ответы :

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Форма работы: письменно в тетради; проверка работы и взаимопроверка между студентами

Контрольные вопросы:

1. Что такое производная?
2. Что такое дифференцирование?

Самостоятельная работа по теме «Производная. Вычисление производных тригонометрических функций»

Цель: закрепить навыки вычисления производной функции, отработка правил дифференцирования

Задание: выполните тест. Ответы теста запишите в таблицу «Ответы», решение заданий ниже под таблицей. Представлено 2 варианта, по списку в журнале: для нечетных номеров 1в, для четных номеров 2в.

Критерии оценки: «5» выполнены правильно все задания части А, В и есть запись решения; «4» выполнены все задания части А с решением; «3» выполнены 6-8 заданий; «2» выполнено правильно менее половины заданий

Методические указания: используй таблицы « Таблица производных», «Правила дифференцирования» (смотри предыдущую работу)

Тест. Вариант 1А1. Найдите производную функции $y = 4x^3$.

1) $12x^2$ 2) $12x$ 3) $4x^2$ 4) $12x^3$

A2. Найдите производную функции $y = 6x - 11$.

1) -52 2) 11 3) 64 4) $6x$

A3. Найдите производную функции $y = \frac{x-1}{x}$.

1) $-\frac{1}{x^2}$ 2) $\frac{x-1}{x^2}$ 3) $\frac{2x+1}{x^2}$ 4) $\frac{1}{x^2}$

A4. Найдите производную функции $y = x \sin x$.

1) $\sin x - x \cos x$; 2) $\sin x + x \cos x$; 3) $\cos x$; 4) $x + x \cos x$

A5. Найдите производную функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$

1) $\pi^2 - 1$ 2) $2\pi + 1$ 3) $2\pi - 1$ 4) 2π

A6. Вычислите значение производной функции $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x$ в точке $x_o = 2$.

1) 10 2) 12 3) 8 4) 6

A7. Найдите производную функции $y = \sin(3x + 2)$.

1) $\cos(3x + 2)$; 2) $-3\cos(3x + 2)$; 3) $3\cos(3x + 2)$; 4) $-\cos(3x + 2)$

A8. Вычислите значение производной функции $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$ в точке $x_o = 4$.

1) 21

2) 24

3) 0

4) 3,5

A9. Вычислите значение производной функции $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(4x - \pi) + \frac{\pi}{4}$

в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

1) 2

2) $\frac{\pi}{4}$

3) 4

4) $\frac{\pi}{2}$

A10. Найдите производную функции $y = x^2 \cos x$.

1) $2x \sin x$ 2) $-2x \sin x$ 3) $2x \cos x + x^2 \sin x$ 4) $2x \cos x - x^2 \sin x$

B1. Вычислите значение производной функции $y = 14\sqrt{2x-3}$ в точке $x_o = 26$.

B2. Найдите значение x при которых производная функции $y = \frac{x-2}{x^2}$ равна 0.

Вариант 2

A1. Найдите производную функции $y = \frac{1}{3}x^6$.

1) $2x^6$ 2) $2x^5$ 3) $\frac{1}{3}x^5$ 4) $6x^5$

A2. Найдите производную функции $y = 12 - 5x$.

1) 72) 12 3) -54) -5x

A3. Найдите производную функции $y = \frac{x+3}{x}$.

1) $\frac{3}{x^2}$ 2) $\frac{2x-3}{x^2}$ 3) $-\frac{3}{x^2}$ 4) $-\frac{3}{x}$

A4. Найдите производную функции $y = x \cos x$.

1) $\cos x - x \sin x$ 2) $\cos x + x \sin x$ 3) $-\sin x$ 4) $x - \sin x$

A5. Найдите производную функции $y = x^2 + \cos x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

1) $\pi^2 - 1$ 2) $\pi + 1$ 3) $\frac{\pi}{2} - 1$ 4) $\pi - 1$

A6. Вычислите значение производной функции $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x$ в точке

$$x_0=2.$$

- 1) 13 2) 3 3) 8 4) 27

A7. Найдите производную функции $y = \cos(5x - 2)$.

- 1) $-2\sin(5x - 2)$ 2) $-5\sin(5x - 2)$ 3) $5\sin(5x - 2)$ 4)
 $\sin(5x - 2)$

A8. Вычислите значение производной функции $y = \frac{3}{x} - \sqrt{x}$ в точке

$$x_0 = \frac{1}{4}. \quad 1) -47 \quad 2) -49 \quad 3) 47 \quad 4) 11,5$$

A9. Вычислите значение производной функции $y = 1 + \operatorname{ctg}(2x + \pi)$

в точке $x_0 = -\frac{\pi}{4}$. 1) 2 2) -1 3) -2 4) $-\frac{1}{2}$

A10. Найдите производную функции $y = x^2 \sin x$.

- 1) $2x \cos x$ 2) $2x \sin x - x^2 \cos x$ 3) $2x \sin x + x^2 \cos x$ 4) $-2x \cos x$

B1. Вычислите значение производной функции $y = 30\sqrt{4 - 3x}$ в точке $x_0 = -7$.

B2. Найдите значение x , при которых производная функции $y = \frac{x+2}{x^2}$ равна 0.

Модельные ответы:

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2
1	1	3	4	2	3	2	3	1	1	4	2	4
2	2	3	3	1	4	1	2	2	3	3	-9	-4

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы: 1. Перечисли правила дифференцирования.

Самостоятельная работа по теме «Производная сложной функции. Дифференцирование»

Цель: закрепить навыки, полученные на занятии, зная формулы дифференцирования элементарных, тригонометрических, сложных функций

Задание: 1. Вычислите производные сложных функций.

Критерии оценки: «5» выполнены все 10 заданий; «4» выполнено 8-9 заданий, или есть недочеты; «3» выполнено 6-7 заданий; «2» выполнено менее половины заданий

Методические указания: Нахождение производных сложных

функций $\left. \begin{array}{l} y = f(u) \\ u = \varphi(x) \end{array} \right\} \Rightarrow y = f(\varphi(x))$ - сложная функция.

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{u} \\ u = x^2 + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 5} \text{ - сложная функция.}$$

Производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ вычисляется по формуле $y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Например:

$$1. y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}; u = x^2 + 3x + 4; y = \sqrt{u};$$

$$y' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{(x^2 + 3x + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 3x + 4}} = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$$

$$2. y = (23 + 15x + x^2)^3; u = 23 + 15x + x^2; y = u^3$$

$$\begin{aligned} y' &= 3u^2 \cdot u' = 3(23 + 15x + x^2)^2 \cdot (x^2 + 15x + 23)' = \\ &= 3(23 + 15x + x^2)^2 \cdot (2x + 15) \end{aligned}$$

Вычислите производные сложных функций:

Найдите производную функции:

1. $((x^4 - x - 1)^4)'$
2. $((x^3 - 6x + 8)^6)'$
3. $((x^5 - 8x^2)^7)'$
4. $((x^6 - 5x^2 + 8x)^{10})'$
5. $((x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 1)^5)'$
6. $((x^2 + 8)^2)'$
7. $((x^2 - 5x + 8)^6)'$
8. $((x^3 - 1)^6)'$
9. $((9 - x^2)^4)'$
10. $((x^4 - x - 1)^5)'$

Вариант №2

Найдите производную функции:

1. $((5x^4 - 5x - 1)^4)'$
2. $((4x^3 - 6x + 8)^6)'$
3. $((6x^5 - 8x^2)^7)'$
4. $((5x^6 - 5x^2 + 8x)^{10})'$
5. $((4x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 1)^5)'$
6. $((7x^2 + 8)^2)'$
7. $((9x^2 - 5x + 8)^6)'$
8. $((8x^3 - 1)^6)'$
9. $((9 - 9x^2)^4)'$
10. $((5x^4 - 7x - 1)^5)'$

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы:

1. В чем заключается геометрический смысл производной?
2. В чем заключается физический смысл производной?

Самостоятельная работа по теме «Исследование функций с помощью производной»

Цель: закрепить навыки, полученные на занятии, зная схему исследования функции.

Задания: Найти интервалы монотонности функций; исследовать на экстремум функции;

Методические указания:

Способность производной характеризовать скорость изменения функции (а значит, и ее графика) лежит в основе исследования функций с помощью производной и построения графика.

Для возрастающей функции (рис. 3) угол наклона касательной острый, т.е. $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha > 0$, для убывающей (рис. 4) – тупой, т.е.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha < 0.$$

Можно по известному знаку производной судить о поведении функции.

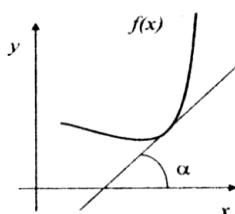


Рис. 3

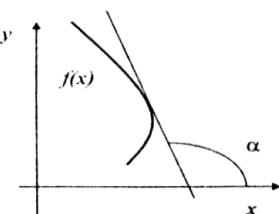


Рис. 4

Функция постоянна в каждом интервале, в котором ее производная равна нулю, возрастает в каждом интервале, где производная положительна, и убывает в тех интервалах, где производная отрицательна.

Особую роль играют так называемые критические точки из области определения функции, т.е. точки, в которых производная обращается в нуль, либо не существует.

Среди критических точек отметим точки экстремума.

Экстремумы функции

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке x_1 (рис. 5), если значение функции в этой точке больше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_1 , т.е. если $f(+\Delta x) < f(x_1)$ для любых Δx , как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по модулю. Таким образом, $x = x_1$ – точка максимума, а $y_{\max} = f(x_1)$ – максимум функции.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке x_2 (рис. 5), если значение функции в этой точке меньше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_2 , т.е. если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ для любых Δx , как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по модулю. Таким образом, $x = x_2$ – точка минимума, а $y_{\min} = f(x_2)$ – минимум функции.

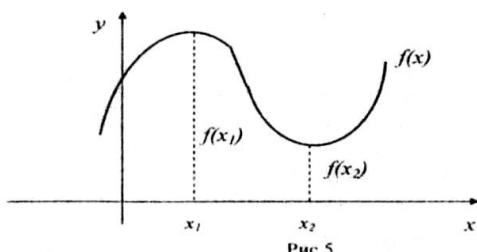


Рис. 5

Для исследования функции по первой производной следует:

1. Найти область определения функции,
2. Найти первую производную и критические точки.
3. Отметить границы области определения и критические точки на числовой прямой.
4. Исследовать знак производной в каждом из полученных интервалов.
5. Выписать точки экстремума и вычислить экстремумы функции.

Пример 1. Найти экстремумы функции $y = (1 - x)^2$

Решение:

1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, $x \in R$

2. Функция имеет производную всюду, поэтому определяем критические точки из условия $f'(x) = 0$. Находим производную.

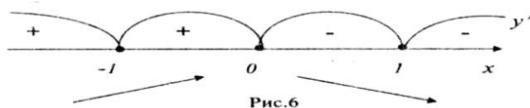
$$y' = 3(1-x^2)^2(1-x^2)' = 3(1-x^2)^2(-2x) = -6x(1-x^2)^2$$

$$y' = 0; -6x(1-x^2)^2 = 0; x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 1.$$

3. Отметим эти критические точки на числовой прямой (рис.6).

4. Исследуем знак производной $y' = -6x(1-x^2)^2$ в каждом из полученных интервалов: $y'(-2) > 0$, $y'(-0,5) > 0$, $y'(0,5) < 0$, $y'(-2) < 0$.

5. Точка $x = 0$ – точка максимума, так как при переходе через нее слева направо производная меняет знак с плюса на минус: $y_{\max} = y(0) = 1$.



Точки $x = -1$ и $x = 1$ не являются точками экстремума.

Можно провести исследование функции с помощью второй производной.

Если в точке $x = x_0$ первая производная равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная отлична от нуля, то $x = x_0$ – точка экстремума.

При этом если вторая производная в этой точке положительна

($f''(x_0) > 0$), то $x = x_0$ – точка минимума; если вторая производная в этой точке отрицательна ($f''(x_0) < 0$), то $x = x_0$ – точка максимума.

Для исследования функции на экстремум по первой и второй производной следует:

1. Найти область определения функции.
2. Найти первую производную функции и стационарные точки, т.е. точки, в которых она обращается в нуль.
3. Найти вторую производную и исследовать ее знак в каждой критической точке.
4. Выписать точки экстремума и вычислить (если нужно) экстремумы функции.

Пример 2. Найти экстремумы функции: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Решение

1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $x \in R$

2. Функция имеет производную всюду, поэтому критические точки определяем из условия $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0, 3x^2 - 6x = 0.$$

$$3x(x-2) = 0, x_1 = 0, x_2 = 2.$$

3. Находим вторую производную функции $f''(x) = 6x - 6$. Исследуем знак второй производной в каждой критической точке: $f''(0) = -6 < 0$, значит, $x=0$ – точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 1$.

$$f''(2) = 6 > 0, \text{ значит, } x=2 \text{ - точка минимума}$$

$$y_{\min} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -3.$$

Наибольшее и наименьшее значение функции

Наибольшим значением функции называется самое большое, а наименьшим – самое меньшее из всех ее значений. Функция может иметь только одно наибольшее значение и только одно наименьшее значение или может не иметь их совсем. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $a \leq x \leq b$, где она непрерывна, следует:

1. Найти экстремумы функции на данном отрезке.
2. Найти значение функции на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$
3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \quad \text{на отрезке } [-2; 4].$$

Решение

1. Найдем экстремумы функции, для чего найдем производную функции и критические точки из условия $y' = 0$, $y' = 0$ при $x_1 = 0$, $x^2 - 2x - 3 = 0$,

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot (-3) = 16, x_{1,2} = \frac{(2 \pm 4)}{2}, x_2 = -1, x_3 = 3.$$

$$y' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$$

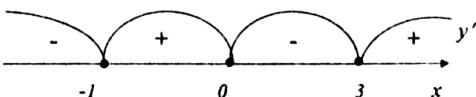


Рис.7

Отметим критические точки 1 рода $x = -1, x = 0, x = 3$, на числовой прямой (рис.7).

Исследуем знак производной в каждом из полученных интервалов:

$$\begin{aligned} y'(-2) &< 0, & y'(-0,5) &> 0, y'(1) < 0, \\ y'(4) &< 0. & y_{\min} = y(-1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 1 \frac{5}{12}; & \\ \end{aligned}$$

Таким $y_{\max} = y(0) = 2$;

$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{4} \cdot 81 + \frac{2}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 + 2 = -11 \frac{1}{4}.$$

образом,

Задания

I вариант	II вариант	III вариант
Найти интервалы монотонности функций:		
a) $y = x^2 - 6x + 5$	a) $y = 2x^2 - 4x + 5$	a) $y = -x^2 - 4x + 3$
б) $y = 2x^2 - 4x + 5$	б) $y = x^2 + x + 1$	б) $y = (x-2)(x+3)$
в) $y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 7x - 8$	в) $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 5$	в) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
Исследовать на экстремум функции:		
a) $y = x^2 - 10x + 9$	a) $y = x^3 + 9x - 1$	a) $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$
б) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 7$	б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$	б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 5$
в) $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 2$	в) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	в) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 2$
г) $y = 7x^2 - 56x + 8$	г) $y = x^2 + 2x - 3$	г) $y = 3x^2 - 6x + 5$
Исследовать функции и построить их графики		
a) $y = x(2-x)^2$	a) $y = x^3 - 5x^2 + 8x$	a) $y = 2x^3 - 3x + 1$
б) $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$	б) $y = x^3 - 6x^2 + 25$	б) $y = x^3 - 3x^2 + 6x$
в) $y = x^2 + 2x - 3$	в) $y = 2x^2 - x - 3$	в) $y = 1 - x - x^2$

Контрольные вопросы:

1. Как связаны между собой свойства функции и её производной?

2. Схема исследования функции, её основные этапы?

Самостоятельная работа по теме «Производная и дифференцирование»

Цель: получить представление об истории развития дифференциального и интегрального исчисления, об учёных, внесших вклад в развитие математического анализа; получить представление о применении производной в различных областях науки и техники, о связи математики с другими науками

Задание: 1.Подготовить презентацию по одной из тем: «Развитие дифференциального и интегрального исчисления», «Производная и её применение», «Приложение производной в производственных процессах». 2.Работа с литературой, интернет-ресурсами.

Методические указания: Требования к презентации

На первом слайде размещается:

- ✓ название презентации;
- ✓ автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);
- ✓ год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов	
Стиль	Необходимо соблюдать единый стиль оформления;
Фон	Для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	На одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; для фона и текста используются контрастные цвета; особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	Можно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде; не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	Использовать короткие слова и предложения; время глаголов должно быть везде одинаковым; заголовки должны привлекать внимание
Расположение информации на странице	Горизонтальное расположение информации; наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней.
Шрифты	Для заголовков не менее 24; для остальной информации не менее 18; для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа;
Способы выделения информации	Следует использовать: рамки, границы, заливку; разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки; рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	Не заполнять один слайд слишком большим объемом информации; наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

Форма работы: презентация

Контрольные вопросы: 1.Что такое производная функции?

2.Что такое дифференцирование?

Самостоятельная работа по теме «Уравнение касательной к графику функции»

Цель: закрепить алгоритм нахождения уравнения касательной к графику функции;

Задание: 1. Повторить алгоритм «Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x_0=a$ »; разобрать пример;

2. Выполнить упражнения для закрепления.

Критерии оценки: «5» выполнены все задания теста правильно; «4» выполнено 4 задания; «3» выполнено 3 задания; «2» выполнено 2 задания.

Форма работы: письменно в тетради.

Методические указания: используй алгоритм

«Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a .

2. Вычислить $f(a)$.

3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.

4. Подставить найденные числа $a, f(a), f'(a)$ в формулу:
 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

Пример: Составьте уравнение касательной к графику

функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение.

1. $x_0 = 3$ – абсцисса точки касания.

2. $f(3) = -2$.

3. $f'(x) = x^2 - 4$, $f'(3) = 5$.

4. Подставив в уравнение касательной значения $x_0=3$, $f(x_0)=-2$, $f'(x_0)=5$, получим $y = -2 + 5(x - 3)$, т.е. $y = 5x - 17$. Это и есть искомое уравнение касательной.

Ответ: $y = 5x - 17$.

Упражнения

Найти уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 . Решение вести по образцу примера, указанного выше. Выбрать правильный ответ.

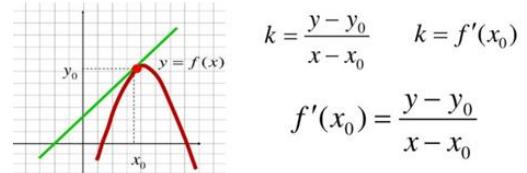
	1	2	3	4
1. $f(x) = -x^2 - 4x + 2$, $x_0 = -1$.	$y = -2x - 3$	$y = 2x - 1$	$y = -x + 3$	$y = 2x + 3$.
2. $f(x) = -x^2 + 6x + 8$, $x_0 = -2$.	$y = 2x - 6$	$y = 10x + 12$	$y = 4x + 8$	$y = -10x + 8$.
3. $f(x) = x^3 + 5x + 5$, $x_0 = -1$.	$y = 7x + 8$	$y = 8x + 7$	$y = 9x + 8$;	$y = 8x + 6$.
4. $f(x) = 2\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.	$y = \pi - x$	$y = \pi - 2x$	$y = \frac{\pi}{2} - 2x$	$y = \frac{\pi}{2} - x$
5. $f(x) = 1 - \sin 2x$, $x_0 = 0$	$y = 1 - 2x$	$y = 2x$	$y = -2x$;	$y = 2x + 1$

Контрольные вопросы:

1. Что такое касательная? 2. Уравнение касательной?

Уравнение касательной

Дана функция $y = f(x)$ и точка x_0



$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ТЕМА 1.4 ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Самостоятельная работа по теме «Первообразная»

Цель: закрепить и систематизировать навыки, полученные на занятии; овладение практическими навыками интегрирования при решении упражнений.

Задание: 1.Ответить на вопросы; 2.Выполнить задания самостоятельной работы. Работа состоит из 4 вариантов. Свободный выбор варианта.

Методические указания:

Первообразная (antiderivative)

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ в некотором промежутке X , если ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Пример. Поскольку

$$(x^3)' = 3x^2$$

тогда x^3 есть первообразная для функции $3x^2$

Правила вычисления первообразных

№	Правила	Примеры
1	Первообразная суммы равна сумме первообразных	$f(x)=x^2; F(x)=\frac{1}{3}x^3$ Первообразная для $g(x)=2x; G(x)=x^2$ функции $f(x)+g(x)$: $\frac{1}{3}x^3+x^2$
2	Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной	$f(x)=x^3; F(x)=\frac{1}{4}x^4$ $f_1(x)=3 \cdot x^3$, значит, $F_1(x)=3 \cdot \frac{1}{4}x^4=\frac{3}{4}x^4$
3	Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ и k, b – постоянные, $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первообразная для $f(kx+b)$	$f(x)=(2x-1)^5$. Для $h(x)=x^5$ – первообразная $H(x)=\frac{x^6}{6}$. Для функции $h(2x-1)=(2x-1)^5$ первообразной будет $\frac{1}{2}H(2x-1)=\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^6}{6}; F(x)=\frac{(2x-1)^6}{12}$

№	Правила вычисления интегралов	Примеры
1	$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$	$\int_0^1 (x^2+5x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 5x dx = \frac{1}{3}x^3 \Big _0^1 + \frac{5}{2}x^2 \Big _0^1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = 2\frac{5}{6}$
2	$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$	$\int_1^2 5xdx = 5 \cdot \int_1^2 xdx = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 \Big _1^2\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) = 5 \cdot 1,5 = 7,5$

shkolapifagor.ru

Критерии оценки: «5» выполнены все задания; «4» выполнены все задания и есть недочеты; «3» выполнено 1 задание; «2» выполнено менее половины заданий

Форма работы: письменно в тетради.

Контрольные вопросы: (Что бы понять уровень знаний дисциплины попробуйте ответить на следующие вопросы, используя список основной и дополнительной литературы или другие источники). Если есть необходимость, то законспектируйте ответы на вопросы.

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?

3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то каким равенством связаны они между собой?
4. Первообразная определяется неоднозначно. Как это нужно понимать?
5. Почему при интегрировании функций появляется произвольная постоянная?
6. Почему одна функция имеет целую совокупность первообразных?
7. Как записать всю совокупность первообразных функций?
8. Что называется неопределенным интегралом?
9. Чем отличается неопределенный интеграл от первообразной функции?
10. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
11. Что такое определенный интеграл?
12. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
13. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
14. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равной отрицательному числу, нулю и почему?
15. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Вариант 1

1. Найдите первообразную для следующих функций:

- A) $f(x) = \sqrt{7};$
 Б) $f(x) = x^{11};$
 В) $f(x) = \frac{1}{x^5};$
 Г) $f(x) = x^8 + 3x^7 - 5x + 2;$
 Д) $f(x) = -\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{3}x;$
 Е) $f(x) = (4x - 5)^2;$
 Ж) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 6x).$

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку M :

- А) $f(x) = 3x^2 - 8x^3 + 5$, $M(-2; 10);$
 Б) $f(x) = -8\cos\frac{x}{3}$, $M(\frac{\pi}{6}; 5).$

Вариант 3

1. Найдите первообразную для следующих функций:

- А) $f(x) = -0,45;$
 Б) $f(x) = x^{10};$
 В) $f(x) = \frac{1}{x^7};$
 Г) $f(x) = 2x^6 + 3x^5 - 2x;$
 Д) $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} - \sqrt{7};$
 Е) $f(x) = (5x - 6)^3;$
 Ж) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{6} - 5x).$

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку M :

- А) $f(x) = -9x^2 - x + 4$, $M(-4; -20);$
 Б) $f(x) = 4\sin 3x$, $M(\frac{\pi}{3}; 7).$

Форма работы: письменно в тетради

Вариант 2

1. Найдите первообразную для следующих функций:

- А) $f(x) = \frac{12}{17};$
 Б) $f(x) = x^{95};$
 В) $f(x) = \frac{1}{x^6};$
 Г) $f(x) = x^5 + 8x^3 - \sqrt{5};$
 Д) $f(x) = 4 + \sin 2x;$
 Е) $f(x) = (2 - 7x)^4;$
 Ж) $f(x) = \frac{3}{\sin^2(4x - \frac{\pi}{3})}.$

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку M :

- А) $f(x) = 4x^3 + 10x - 9$, $M(3; 15);$
 Б) $f(x) = \frac{6}{\cos^2 x}$, $M(\frac{\pi}{3}; -2).$

Вариант 4

1. Найдите первообразную для следующих функций:

- А) $f(x) = 132;$
 Б) $f(x) = x^{11};$
 В) $f(x) = \frac{1}{x^8};$
 Г) $f(x) = -2x + 6x^9 - 0,5;$
 Д) $f(x) = \frac{2}{5} + \cos x;$
 Е) $f(x) = (\sqrt{2} - 6x)^5;$
 Ж) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(3x + \pi)}.$

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку M :

- А) $f(x) = 7 - 6x^2 + 12x^3$, $M(2; -25);$
 Б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $M(\frac{3\pi}{4}; -5).$

Самостоятельная работа по теме «Неопределенный интеграл»

Цель: углубление и расширение знаний по данной теме; формирование умений использовать специальную и дополнительную литературу;

Задание: 1. Разбор примеров, обратить внимание на оформление задания. 2. Вычислить неопределенные интегралы (10 заданий) 24 варианта. Вариант согласно списка в журнале.

Критерии оценки: «5» выполнены все задания; «4» выполнены все задания и есть недочеты; «3» выполнено 6 заданий; «2» выполнено менее половины заданий

Методические указания: в теме «Неопределенный интеграл» рассматривается задача, обратная задаче о дифференцировании функций.

Задача состоит в следующем: дана функция $f(x)$, являющаяся производной некоторой функции $F(x)$; требуется найти функцию $F(x)$.

К такой математической задаче приводят многие физические, химические и другие задачи, например, задача об отыскании закона равномерного движения материальной точки вдоль прямой по заданной скорости, задача о нахождении закона химической реакции по известной её скорости.

Особое значение эта тема имеет при решении дифференциальных уравнений, описывающих различные физические и механические процессы.

Для успешного усвоения навыков интегрирования надо, прежде всего, выучить наизусть таблицу интегралов и свойства интегралов.

Таблица простейших интегралов

1. $\int 0 \cdot du = C;$	2. $\int 1 \cdot du = u + C;$
3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$	4. $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C;$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C;$	6. $\int \frac{1}{u} du = \ln u + C;$
7. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$	8. $\int e^u du = e^u + C;$
9. $\int \sin u du = -\cos u + C;$	10. $\int \cos u du = \sin u + C;$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tgu} + C;$	12. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctgu} + C;$

Правила интегрирования

1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$

2. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx;$

3. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(kx + m) dx = \frac{F(kx + m)}{k} + C$

Пусть известно, что $\int f(x) dx = F(x) + C$

Тогда $\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$

Это правило упрощает вычисление многих неопределенных интегралов.
Например:

$$\int (x+2)^3 dx = \frac{(x+2)^4}{4} + C$$

$$\int (7x+2)^3 dx = \frac{1}{7} \frac{(7x+2)^4}{4} + C$$

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C$$

$$\int e^{-3x+1} dx = \frac{1}{-3} e^{-3x+1} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

2. Вычислить неопределенный интеграл.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1. $\int 7dx$ 2. $\int x^8 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4 \cos x dx$ 7. $\int (7x - 8)^4 dx$ 8. $\int (7x^2 - 3x^3 + 4x^5) dx$ 9. $\int \sin(7x - \frac{\pi}{4}) dx$ 10. $\int (8 \cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2}) dx$	1. $\int 5dx$ 2. $\int x^6 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \cos x dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6 \sin x dx$ 7. $\int (3x + 9)^6 dx$ 8. $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x^4) dx$ 9. $\int \cos(5x - \frac{\pi}{2}) dx$ 10. $\int (6 \sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9}) dx$	1. $\int 3dx$ 2. $\int x^3 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9 \cos x dx$ 7. $\int (4x - 3)^5 dx$ 8. $\int (4x^4 + 6x^2 - 8x^7) dx$ 9. $\int \sin(6x - \frac{\pi}{3}) dx$ 10. $\int (3 \cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1}) dx$
Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
1. $\int 2dx$ 2. $\int x^5 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 6e^x dx$ 6. $\int 4 \cos x dx$ 7. $\int (6x - 10)^8 dx$ 8. $\int (6x^3 + 8x^7 - 3x^8) dx$ 9. $\int \sin(9x - \frac{\pi}{5}) dx$ 10. $\int (8 \cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2}) dx$	1. $\int 4dx$ 2. $\int x^9 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \cos x dx$ 5. $\int 3e^x dx$ 6. $\int 6 \sin x dx$ 7. $\int (5x + 11)^7 dx$ 8. $\int (12x^7 + 6x^5 + 4x^6) dx$ 9. $\int \cos(8x - \frac{\pi}{3}) dx$ 10. $\int (6 \sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9}) dx$	1. $\int 6dx$ 2. $\int x^7 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 9e^x dx$ 6. $\int 9 \cos x dx$ 7. $\int (7x - 2)^3 dx$ 8. $\int (4x^3 + 3x^9 - 5x^2) dx$ 9. $\int \sin(3x - \frac{\pi}{4}) dx$ 10. $\int (3 \cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1}) dx$

Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9
1. $\int 8dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4 \cos x dx$ 7. $\int (7x - 8)^4 dx$ 8. $\int (7x^2 - 3x^3 + 4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x - \frac{\pi}{4}) dx$ 10. $\int (8 \cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2})dx$	1. $\int 9dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6 \sin x dx$ 7. $\int (3x + 9)^6 dx$ 8. $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x - \frac{\pi}{2}) dx$ 10. $\int (6 \sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9})dx$	1. $\int 10dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9 \cos x dx$ 7. $\int (4x - 3)^5 dx$ 8. $\int (4x^4 + 6x^2 - 8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x - \frac{\pi}{3}) dx$ 10. $\int (3 \cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1})dx$
Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
1. $\int 7dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4 \cos x dx$ 7. $\int (6x - 10)^8 dx$ 8. $\int (7x^2 - 3x^3 + 4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x - \frac{\pi}{4}) dx$ 10. $\int (8 \cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2})dx$	1. $\int 5dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6 \sin x dx$ 7. $\int (5x + 11)^7 dx$ 8. $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x - \frac{\pi}{2}) dx$ 10. $\int (6 \sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9})dx$	1. $\int 3dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9 \cos x dx$ 7. $\int (7x - 2)^3 dx$ 8. $\int (4x^4 + 6x^2 - 8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x - \frac{\pi}{3}) dx$ 10. $\int (3 \cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1})dx$
Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
1. $\int 2dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4 \cos x dx$ 7. $\int (7x - 8)^4 dx$ 8. $\int (7x^2 - 3x^3 + 4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x - \frac{\pi}{4}) dx$ 10. $\int (8 \cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2})dx$	1. $\int 4dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6 \sin x dx$ 7. $\int (3x + 9)^6 dx$ 8. $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x - \frac{\pi}{2}) dx$ 10. $\int (6 \sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9})dx$	1. $\int 6dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9 \cos x dx$ 7. $\int (4x - 3)^5 dx$ 8. $\int (4x^4 + 6x^2 - 8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x - \frac{\pi}{3}) dx$ 10. $\int (3 \cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1})dx$
Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
1. $\int 8dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4 \cos x dx$ 7. $\int (7x - 8)^4 dx$ 8. $\int (7x^2 - 3x^3 + 4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x - \frac{\pi}{4}) dx$ 10. $\int (8 \cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2})dx$	1. $\int 9dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6 \sin x dx$ 7. $\int (3x + 9)^6 dx$ 8. $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x - \frac{\pi}{2}) dx$ 10. $\int (6 \sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9})dx$	1. $\int 10dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9 \cos x dx$ 7. $\int (4x - 3)^5 dx$ 8. $\int (4x^4 + 6x^2 - 8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x - \frac{\pi}{3}) dx$ 10. $\int (3 \cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1})dx$

Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21
1. $\int 11dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4 \cos x dx$ 7. $\int (7x - 8)^4 dx$ 8. $\int (7x^2 - 3x^3 + 4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x - \frac{\pi}{4}) dx$ 10. $\int (8 \cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2})dx$	1. $\int 12dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6 \sin x dx$ 7. $\int (3x + 9)^6 dx$ 8. $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x - \frac{\pi}{2}) dx$ 10. $\int (6 \sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9})dx$	1. $\int 13dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9 \cos x dx$ 7. $\int (4x - 3)^5 dx$ 8. $\int (4x^4 + 6x^2 - 8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x - \frac{\pi}{3}) dx$ 10. $\int (3 \cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1})dx$

Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24
1. $\int 17dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4 \cos x dx$ 7. $\int (7x - 8)^4 dx$ 8. $\int (7x^2 - 3x^3 + 4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x - \frac{\pi}{4}) dx$ 10. $\int (8 \cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2})dx$	1. $\int 15dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6 \sin x dx$ 7. $\int (3x + 9)^6 dx$ 8. $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x - \frac{\pi}{2}) dx$ 10. $\int (6 \sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9})dx$	1. $\int 13dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9 \cos x dx$ 7. $\int (4x - 3)^5 dx$ 8. $\int (4x^4 + 6x^2 - 8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x - \frac{\pi}{3}) dx$ 10. $\int (3 \cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1})dx$

Форма работы: письменно в тетради

Контрольные вопросы:

- Описать свойства неопределенного интеграла.

**Самостоятельная работа по теме
«Основные свойства неопределенного интеграла»**

Цель: углубить и расширить теоретические знания по теме «Основные свойства неопределенного интеграла»;

Задание: Вычислить неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием.

Критерии оценки: «5»- верно выполнены все задания; «4»- верно выполнены 8-9 заданий;

«3»- верно выполнено 6 заданий; «2»- выполнено менее половины заданий.

Методические указания: используй таблицу интегралов и свойства интегралов.

Таблица простейших интегралов

$$1. \int 0 \cdot du = C; \quad 2. \int 1 \cdot du = u + C;$$

$$3. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1; \quad 4. \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C;$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C; \quad 6. \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C;$$

$$7. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \quad 8. \int e^u du = e^u + C;$$

$$9. \int \sin u du = -\cos u + C; \quad 10. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$11. \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tgu} + C; \quad 12. \int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctgu} + C;$$

**Основные свойства
неопределенного интеграла**

Везде далее предлагается, что все рассматриваемые неопределенные интегралы существуют.

$$1. \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$2. d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

$$3. \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \text{ где } \alpha \neq 0,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$$4. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

т. е. неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций.

5. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \text{ где } a \neq 0.$$

Вычислить неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием:

$$1. \int 5x^2 - 4x^2 + 2x - 1)dx ; \quad 2. \int(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3\sqrt{x}} + 3)dx.$$

$$3. \int \frac{2x^3 - 3x + 7}{x} dx ; \quad 4. \int(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 x} + 3^x)dx.$$

$$5. (x^5 - \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x-4}) dx. \quad 6. \int(a \sin x - b \cos x + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx.$$

$$7. \int(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4})dx. \quad 8. \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \quad 9. \int \frac{dx}{5+x^2}$$

$$10. \int(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x\sqrt{x}} + 5)dx. \quad 11. \int \frac{dx}{5-x^2} \quad 12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$$

Форма работы: письменно в тетради

Контрольные вопросы:

1. Что такое интегрирование?
2. Что такое первообразная?

**Самостоятельная работа по теме
«Определенный интеграл».**

Цель: углубить и расширить теоретические знания по теме «Определенный интеграл». Продолжить формировать умения по решению интегралов;

Задание: 1. Вычислить определенный интеграл.

Критерии оценки: «5»- верно выполнены все 9 заданий; «4»- верно выполнены 7-8 заданий;
«3»- верно выполнено 5-6 заданий; «2»- выполнено менее 5 заданий.

Методические указания: используй таблицу интегралов и свойства интегралов

Свойства определённого интеграла.	
1. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$	2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$, k -любое число	
4. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx$	
5. Аддитивность определённого интеграла. Для любых чисел a, b, c справедливо:	
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	

Таблица простейших интегралов	
1. $\int 0 \cdot du = C$;	2. $\int 1 \cdot du = u + C$;
3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$;	4. $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$;
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$;	6. $\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$;
7. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;	8. $\int e^u du = e^u + C$;
9. $\int \sin u du = -\cos u + C$;	10. $\int \cos u du = \sin u + C$;
11. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tg} u + C$;	12. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctg} u + C$;

Пример 1. Вычислим $\int_{-1}^2 x^2 dx$. Поскольку для x^2

одной из первообразных является $\frac{x^3}{3}$, то $\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$.

Для удобства записи разность $F(b) - F(a)$ (приращение функции F на отрезке $[a; b]$) принято сокращенно обозначать $F(x)|_a^b$, т.е. $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$. Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона –

Лейбница обычно записывают в виде $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$. Пример 2. Вычислим $\int_0^\pi \sin x dx$. Пользуясь

введенными обозначениями, получим: $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2$.

Вычислить определенный интеграл:

$\int_0^4 4 \sin x dx$;	$\int_6^{12} 4x^3 dx$;	$\int_9^{33} 7 dx$
$\int_5^6 (x^2 - 6x) dx$,	$\int_{-3}^5 (2x^6 + 4x) dx$	$\int_0^1 43 \sin x dx$,
$\int_6^{12} (4x^{43} - 1) dx$,	$\int_9^{33} (7x + 6) dx$,	$\int_{-3}^5 (6x^6 + x) dx$

Форма работы: письменно в тетради

Контрольные вопросы:

1. Что такое определенный интеграл?
2. Перечислить свойства интегралов.

Самостоятельная работа по теме «Интегральное исчисление».

Цель: изучить применение определенного интеграла, используя специальную и дополнительную литературу;

Задание: Подготовить реферат на тему: «Формула Ньютона - Лейбница», «История интегралов», «Методы интегрирования».

Критерии оценки: «5» - реферат выполнен с учетом методических рекомендаций, тема полностью раскрыта, соблюдается логичность, последовательность изложения материала, качественное внешнее оформление, объем - 4 листа формата А-4; «4» - реферат выполнен с учетом методических рекомендаций, тема полностью раскрыта, но есть небольшие недочеты в работе, объем – 3 листа; «3» - при выполнении реферата наблюдается отклонение от методических рекомендаций, тема раскрыта не полностью, нарушена логичность, отсутствует внутренняя логика изложения, удовлетворительное внешнее оформление, объем менее 2 листов; «2» - при выполнении анализа статьи наблюдается отклонение от методических рекомендаций, тема не раскрыта, неудовлетворительное внешнее оформление, объем менее 2 листов.

Методические указания:

План написания реферата:

1. Введение.
2. Основная часть состоит из глав:
 - ✓ Понятие интеграла;
 - ✓ Криволинейная трапеция;
 - ✓ Понятие площади;
 - ✓ Образцы решений.
3. Заключение.
4. Список литературы.

Список рекомендуемой литературы:

1. Атанасян Л.С. «Геометрия»: Учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 1999. – 207 с.: ил.
2. Богомолов В.Н. Математика [Текст]: учебник для ссузов/Н.В. Богомолов, П.И. Самолйленко. – 3-е издание, стереотипное. – Москва: Дрофа, 2005. – 395 [5] с.: ил.
3. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. «Математика для техникумов» на базе средней школы: Учеб. Пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990 – 576 с.: ил.
4. Мордкович А.Г., Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях. Ч.1: Учеб.для общеобразовательных учреждений. – 7-е изд. – М.: Мнемозина, 2006. – 375 с.: ил.
5. Пехлецкий И.Д. Математика. – М.: Мастерство, 2001-304 с

Интернет ресурсы:

- 1.<http://window.edu.ru/resource/662/75662> Элементы теории числовых и функциональных рядов: Методическое пособие Автор/создатель: Нахман А.Д. Год: 2009
- 2.<http://window.edu.ru/resource/797/56797> Основные законы и формулы по математике и физике: Справочник. Автор/создатель: Булгаков Н.А., Осипова И.А. Год: 2007

Форма работы: реферат выполнить на бумаге формата А-4, распечатать на принтере.

**Самостоятельная работа по теме
«Вычисление интегралов. Нахождение площади криволинейной трапеции»**

Цель: повторение изученного материала, предоставить возможность использовать приобретенные знания при решении задач разного содержания и уровня сложности.

Задание: выполнить упражнения. Всего 6 вариантов. Преподаватель указывает вариант.

Критерии оценки: оценка «5» -верно выполнены 3 задания; «4»- верно выполнены 2 задания; «3»- верно выполнено 1 задание.

Методические указания:

Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными функциями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a, b]$, находится по формуле:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Вычисление площадей с помощью определенного интеграла осуществляется в следующем порядке:

- 1) делается рисунок фигуры, площадь которой необходимо найти;
- 2) находятся пределы интегрирования;
- 3) подбирается нужная формула;
- 4) вычисляется значение площади

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, прямыми $x = -1, x = 2$ и осью абсцисс.

Решение. Построим криволинейную трапецию

Пределы интегрирования: $a = -1, b = 2$.

Площадь вычисляем по формуле $S = \int_a^b (x^2 + 1) dx$.

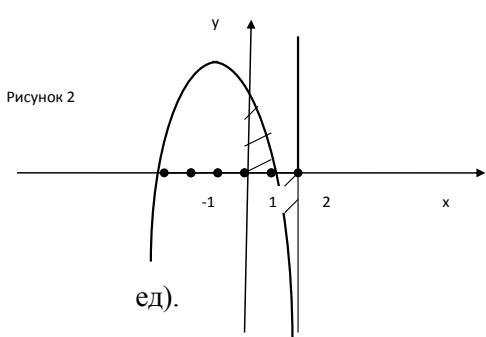
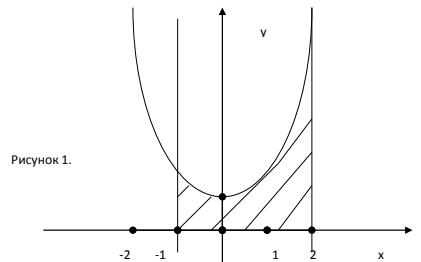
Получаем

$$S = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = 6 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 - 2x + 3$, осями координат и прямой $x = 2$.

Решение. На рисунке 2. изображена фигура, площадь которой надо найти.

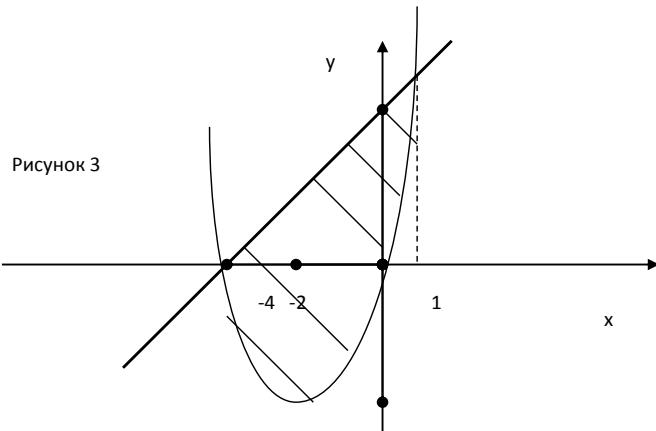
Функция $y = -x^2 - 2x + 3$ на отрезке $[0, 2]$ меняет знак. Следовательно, промежуток интегрирования $[0, 2]$ необходимо разбить на два промежутка: $[0, 1]$ и $[1, 2]$. Получим:



$$S = \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx - \int_1^2 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 - \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 6 \right) + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) = 4 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 4x$ и прямой $x - y + 4 = 0$.

Решение. Сделаем рисунок плоской фигуры, заключенной между параболой и прямой



(рисунок 3).

Найдем пределы интегрирования, для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$ и получим $\{(-4; 0); (1, 5)\}$.

Следовательно, пределы интегрирования: $a = -4, b = 1$.

Вычислим площадь:

$$S = \int_{-4}^1 [x + 4 - (x^2 + 4x)] dx = \int_{-4}^1 (-x^2 - 3x + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-4}^1 = \\ = \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16 \right) = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.)}.$$

Вариант 2

Вариант 1

1. Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int (4x^3 - 6x^2 - 4x + 3) dx \\ \int \frac{x^4 - xe^x + 6}{x} dx$$

2. Вычислите определенные интегралы:

$$\int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx \\ \int_{-4}^5 (4 - x^3) dx$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -3x^2, y = 0, x = 1$ и $x = 2$.

1. Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int (x^{-4} - x^{-3} - 3x^{-2} + 1) dx \\ \int x^4(x-1) dx$$

2. Вычислите определенные интегралы:

$$\int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx \\ \int_{-1}^2 \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5 \right) dx$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$ и $y = 0$.

Вариант 3

1. Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int (5x^{3/2} - 7x^{3/4}) dx$$

$$\int \frac{x^2 * 2^x + 3x^3 + 7x}{x^2} dx$$

2. Вычислите определенные интегралы:

$$\int_{-1}^3 (4x^3 - 6x^2 - 4x + 3) dx$$

$$\int_1^8 (x^3 - \sqrt[3]{x^2}) dx$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = -2$ и $x = 2$.**Вариант 4**

1. Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int (3x^{-4} + 8x^{-5} - 5x) dx$$

$$\int 3(2x^2 - 1)^2 dx$$

2. Вычислите определенные интегралы:

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 1$, $y = 0$, $x = -2$ и $x = 1$.**Вариант 5**

1. Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5 \right) dx$$

$$\int x^3(1+5x) dx$$

2. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а)} \int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx \quad \text{б)} \int_0^3 (3+2x)^3 dx$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 - x$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 1$.**Вариант 6**

1. Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int (3^x - e^x + 2x - 1) dx$$

$$\int (5x+3)^3 dx$$

2. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а)} \int_{\frac{1}{8}}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{б)} \int_{-2}^2 (x^3 + 2x + 5) dx$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x^3$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 2$.**Форма работы:** письменно в тетради**Контрольные вопросы:**

1. Какую фигуру называют криволинейной трапецией? Какая формула позволяет вычислять площадь криволинейной трапеции?
2. Именами каких ученых названа формула определенного интеграла? Как записать интегральную запись формулы Ньютона –Лейбница?

Самостоятельная работа по теме

«Интеграл и его приложения»

Цель: Вычисление определенного интеграла, нахождение площади фигур ограниченных функциями; работа со справочным материалом. Контроль знаний.

Задания: 1. ответить на вопросы; 2. выполнить задания домашней контрольной работы. Преподаватель определяет вариант каждому студенту.

Методические указания: смотри по теме «Неопределенный и определенный интеграл»

Критерии оценки: «5»- верно выполнены все задания домашней контрольной работы; «4»- верно выполнены все задания, но есть недочеты(построены графики не аккуратно и неточно); «3»- верно выполнено 2-3 задания; «2» выполнено менее 2 заданий.

Вопросы:

1. Что называется неопределенным интегралом?
2. Чем отличается неопределенный интеграл от первообразной функции?
3. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
4. Что такое определенный интеграл?
5. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
6. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
7. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равной отрицательному числу, нулю и почему?
8. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Домашняя контрольная работа по теме «Интеграл и его приложения»

Вариант- 1.

1. Указать первообразную для функции $f(x) = x + \cos x$
2. Известно, что $\int_a^b f(x) dx = 2$. Найдите: $2\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx$
3. Вычислить интегралы:
а) $\int_0^1 (x^3 - 4x) dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 dx}{\cos^2 x}$; в) $\int_1^2 \frac{4x^5 - 3x^4 + x^3 - 1}{x^2} dx$

4. Скорость точки движущейся прямолинейно, задана уравнением

$$v(t) = (3t^2 + 1)^M / C. \text{ Вычислить ее путь за 5 сек от начала движения.}$$

5. Вычислить (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Вариант- 2.

1. Указать первообразную для функции $f(x) = 3x^2 - \sin x$
2. Известно, что $\int_a^b f(x) dx = 2$. Найдите: $\int_b^a f(x) dx - 3 \int_b^a f(x) dx$
3. Вычислить интегралы:
а) $\int_{-1}^1 (x^5 + 2x) dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin x dx$; в) $\int_2^3 \frac{6x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 1}{x^2} dx$
4. Скорость точки движущейся прямолинейно, задана уравнением
 $v(t) = (2t^3 + 3)^M / C. \text{ Вычислить ее путь за 2 сек от начала движения.}$
5. Вычислить (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4 - x^2$, $y = 0$

Вариант- 3.

1. Указать первообразную для функции $f(x) = 3 - \cos x$
2. Известно, что $\int_a^b f(x) dx = 2$. Найдите: $\int_b^a f(x) dx + 4 \int_a^b f(x) dx$
3. Вычислить интегралы:
а) $\int_1^2 (3x^2 + 1) dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 dx}{\sin^2 x}$; в) $\int_{-2}^{-1} \frac{5x^7 - 4x^6 + 2x}{x^3} dx$
4. Скорость точки движущейся прямолинейно, задана уравнением
 $v(t) = (t^2 - 5t)^M/c$. Вычислить ее путь за 3 сек от начала движения.
5. Вычислить (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

Вариант - 4.

1. Указать первообразную для функции $f(x) = 4x^3 + 5x$
2. Известно, что $\int_a^b f(x) dx = 2$. Найдите: $5 \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx$
3. Вычислить интегралы:
а) $\int_0^1 (8x - 3x^2) dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos x dx$; в) $\int_{-2}^{-1} \frac{3x^6 - 4x^5 + 7x^4 + 3x^2}{x^4} dx$
4. Скорость точки движущейся прямолинейно, задана уравнением
 $v(t) = (4t^3 + 1)^M/c$. Вычислить ее путь за 1 сек от начала движения.
5. Вычислить (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $y = 1 - x^2$, $y = 0$

Форма работы: письменно в тетради;

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 2.1 Аналитическая геометрия на плоскости

Самостоятельная работа по теме «Аналитическая геометрия на плоскости»

Цель: закрепление знаний изученного материала. Использовать изученные формулы при решении задач и упражнений.

Задание: решить задачи .Всего 2 варианта.

Критерии оценки: «5» выполнены все 3 задания; «4» выполнены 2 задания; «3» выполнено 1 задание; «2» выполнено менее 1 задания.

Методические указания:

- 2. Даны вершины треугольника

$$A(-2; 0), \quad B(3; -1), \quad C(4; -2).$$

Составить: а) уравнение стороны AB и найти ее длину,

б) уравнение медианы BM и найти ее длину,

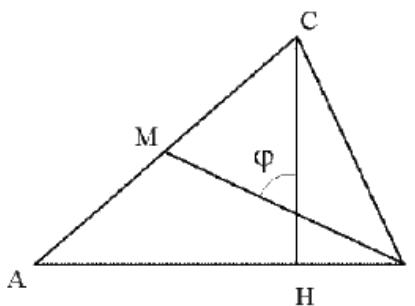
в) уравнение высоты CH и найти ее длину,

г) косинус угла между медианой BM и высотой CH .

Решение.

а) Для составления уравнения стороны AB воспользуемся уравнением прямой через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x + 2}{3 + 2} = \frac{y - 0}{-1 - 0} \Rightarrow \frac{x + 2}{5} = \frac{y}{-1} \Rightarrow x + 5y + 2 = 0.$$



Длину стороны AB найдем как расстояние между двумя точками:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

Вариант 1

Задача 1. Прямая на плоскости

Заданы координаты вершин некоторого треугольника ABC: A(2;1), B(-7;13), C(-1;21).

Найти:

- а) уравнение стороны BC;
- б) уравнение высоты, проведенной из точки A;
- в) уравнение медианы, проведенной из точки C;
- г) уравнение биссектрисы внутреннего угла B.

Задача 2 Уравнение плоскости в пространстве

Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $M_0(-1;3;-5)$

- а) параллельно плоскости $2x + y - 3z - 3 = 0$;
- б) параллельно векторам $\bar{a} = (-1;1;0)$, $\bar{b} = (2;-1;1)$;
- в) и точки $M_1(2;-1;3)$, $M_2(-4;1;2)$.

Задача 3 Уравнение прямой в пространстве

1) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2;-1;3)$

а) параллельно заданной прямой $L_0 \begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$;

б) параллельно линии пересечения плоскостей

$$\alpha_1 : x + y - 2z - 4 = 0, \alpha_2 : -3x - 2y + z + 6 = 0,$$

2) Найти точку пересечения прямой, полученной в задании 1а) с плоскостью

$$\alpha_3 : 5x + 2y - 3z - 3 = 0$$
 и угол между этой прямой и плоскостью α_3 .

Вариант 2

Задача 1. Прямая на плоскости

Заданы координаты вершин некоторого треугольника ABC: A(3;3), B(10;-21), C(-2;-5).

Найти:

- а) уравнение стороны BC;
- б) уравнение высоты, проведенной из точки A;
- в) уравнение медианы, проведенной из точки C;
- г) уравнение биссектрисы внутреннего угла B.

Задача 2 Уравнение плоскости в пространстве

Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $M_0(2;0;4)$

- а) параллельно плоскости $x - 3y + 5z - 6 = 0$;
- б) параллельно векторам $\bar{a} = (2;-3;1)$, $\bar{b} = (1;4;-2)$;
- в) и точки $M_1(3;-2;4)$, $M_2(0;3;1)$.

Задача 3 Уравнение прямой в пространстве

1) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(0;1;-1)$

а) параллельно заданной прямой $L_0 \frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$;

б) параллельно линии пересечения плоскостей

$$\alpha_1 : x - 2y + z = 0, \alpha_2 : 2x + y - z = 2.$$

2) Найти точку пересечения прямой, полученной в задании 1а) с плоскостью $\alpha_3: 2x - y - z + 4 = 0$ и угол между этой прямой и плоскостью α_3 .

Форма работы: подробное решение письменно в тетради.

Контрольные вопросы:

1. Уравнение прямой на плоскости?
2. Уравнение прямой в пространстве?

ТЕМА 2.2 «Кривые второго порядка»

Самостоятельная работа по теме

«Элементы аналитической геометрии на плоскости», «Кривые второго порядка»

Цель: закрепление знаний изученного материала. Использовать изученные понятия и определения при выполнении задания.

Задание: выполнить тест .Всего 2 варианта, по 32 задания.

Критерии оценки: «5» выполнены 30-32 задания; «4» -24-31 задания; «3» -16-23 заданий; «2» выполнено менее 15 заданий.

Методические указания: повтори определения

Вектор – направленный отрезок.

Обозначение $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$.

Длина вектора – длина отрезка AB .

Обозначение длины

$$\bar{a} = |\overrightarrow{AB}| \quad \text{или} \quad a = |\bar{a}|$$

Коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой.

Обозначения:

$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ – векторы сонаправлены;

$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ – векторы противоположно направлены;

$\bar{a} \parallel \bar{b}$ – в общем случае (без указания взаимной направленности).

Равные векторы – векторы, удовлетворяющие

условиям :

- 1) имеют одинаковую длину;
- 2) коллинеарны;
- 3) сонаправлены.

Компланарные векторы — векторы, параллельные одной плоскости.

Два неколлинеарных вектора \bar{a} и \bar{b} образуют **базис на плоскости**.

Три некомпланарных вектора \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} образуют **базис в пространстве**.

Ортонормированный (декартовый) базис – это базис составляющие векторы которого взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

Будем обозначать декартовый базис на плоскости $i \ j$; в пространстве $i \ j \ k$

Линейным операциям над векторами

$$\bar{a} = (a_1; a_2; a_3) \quad \text{и} \quad \bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$$

$$1. \quad \bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$2. \quad \bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$3. \quad \lambda \bar{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$$

Если заданы координаты начала и конца вектора

$$A = (x_1; x_2; x_3) \quad \text{и} \quad B = (y_1; y_2; y_3)$$

тогда координаты вектора вычисляются:

$$\bar{a} = \overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; y_3 - x_3)$$

Скалярным произведением векторов называют сумму произведений их координат:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Скалярным произведением векторов называют произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Скалярное произведение векторов можно еще представить:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}} \bar{b} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}} \bar{a}$$

где $np_{\bar{a}}$ проекция вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} .

С помощью скалярного произведения можно вычислить:

Длину вектора:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Расстояние между двумя точками:

$$AB = |\bar{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Косинус угла между двумя векторами:

$$\cos(\alpha) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Форма работы: заполнить правильными ответами «Бланк ответов теста».

Тест. Вариант 1.

1. Вектором называется:

- А) направленный луч;
- Б) направленный отрезок;
- В) направленный промежуток.

2. Два вектора называются коллинеарными, если:

- А) они лежат на перпендикулярных прямых;
- Б) они лежат не на одной прямой;
- В) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

3. Два ненулевых вектора могут быть:

- А) сонаправленными или противоположно направленными;
- Б) симметричными и противоположно направленными;
- В) соразмерными и противоположно направленными.

4. Два вектора называются равными, если:

- А) они совмещаются поворотом;
- Б) они совмещаются с помощью симметрии;
- В) они совмещаются параллельным переносом.

5. Сложение ненулевых векторов можно выполнить по правилу:

- А) треугольника, параллелограмма, многоугольника;
- Б) треугольника, прямоугольника, многоугольника;
- В) треугольника, трапеции, многоугольника.

6. Вектор называется единичным, если:

- А) его направление совпадает с направлением оси;
- Б) имеет длину и совпадает с направлением оси;
- В) имеет длину, равную единице, и направление, совпадающее с направлением оси.

7. Углом между двумя ненулевыми векторами называется угол

- А) между осями;
- Б) между направлениями этих векторов и имеет градусную меру больше 0, но меньше 180 градусов;
- В) между направлениями этих векторов и имеет градусную меру больше 90, но меньше 180 градусов.

8. Углом между ненулевым вектором и осью называется угол

- А) между осями;
- Б) между направлением оси и вектора и имеет градусную меру больше 90, но меньше 180 градусов;
- В) между направлением оси и вектора и имеет градусную меру больше 0, но меньше 180 градусов.

9. Прямоугольным базисом называется:

- А) пара единичных взаимно перпендикулярных векторов \mathbf{i} и \mathbf{j} ;
- Б) пара единичных векторов \mathbf{i} и \mathbf{j} , отложенных от некоторого начала – точки О;
- В) пара единичных взаимно перпендикулярных векторов \mathbf{i} и \mathbf{j} , отложенных от некоторого начала – точки О.

10. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется:

- А) вектор, равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;
- Б) число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;
- В) число, равное сумме длин этих векторов на косинус угла между ними.

11. Скалярное произведение в координатах равно:

- А) сумме соответствующих координат векторов;
- Б) разности соответствующих координат векторов;
- В) произведению соответствующих координат векторов.

12. Расстояние между двумя точками вычисляется по формуле:

- А) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$;
- Б) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;
- В) $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

13. Уравнение $x = a$, это:

- А) уравнение оси Ох;
- Б) уравнение прямой, параллельной оси Ох;
- В) уравнение прямой, параллельной оси Оу.

14. Уравнение $y = 0$, это:

- А) уравнение оси Ох;
- Б) уравнение прямой, параллельной оси Ох;
- В) уравнение прямой, параллельной оси Оу.

15. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид:

- А) $y = kx + b$;
- Б) $y = kx$;
- В) $y = kx + 2b$.

16. Окружностью называется:

- А) геометрическое место точек;
- Б) геометрическое место точек, удаленных от центра;
- В) геометрическое место точек, одинаково удаленных от центра.

17. Уравнение окружности с центром в произвольной точке имеет вид:

- А) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$;
- Б) $(x + a)^2 + (y + b)^2 = R^2$;
- В) $(x - a)^2 - (y - b)^2 = R^2$.

18. Эллипсом называется

- А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
 Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
 В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

19. Гиперболой называется

- А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
 Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
 В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

20. Параболой называется

- А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
 Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
 В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

21. Фокусами называются

- А) точки, лежащие на оси Оу на заданном расстоянии от начала координат;
 Б) точки, лежащие на оси Ох на заданном расстоянии от начала координат;
 В) точки, лежащие на заданном расстоянии от начала координат.

22. Не имеет центра симметрии:

- А) эллипс;
 Б) гипербола;
 В) парабола.

23. Уравнение эллипса имеет вид:

- А) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
 Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
 В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

24. Уравнение параболы имеет вид:

- А) $y^2 = 2px$;
 Б) $y = 2px$;
 В) $y^2 = px$.

25. Уравнение гиперболы имеет вид:

- А) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
 Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
 В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

26. Парабола имеет:

- А) две оси симметрии;

- Б) одну ось симметрии;
В) три оси симметрии.

27. Эксцентриситетом эллипса e , где $0 < e < 1$ называется

- А) величина $e = \frac{c}{a}$;

- Б) величина $e = \frac{c}{b}$;

- В) величина $e = \frac{c}{a}$.

28. Вершиной параболы называется

- А) точка пересечения оси параболы с кривой;
Б) точка пересечения оси параболы с директрисой;
В) точка пересечения фокуса с кривой.

29. Центром эллипса является:

- А) вершина эллипса;
Б) фокус эллипса;
В) центр симметрии эллипса.

30. Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид:

- А) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$;
Б) $x^2 + y^2 = R^2$;
В) $x^2 - y^2 = R^2$.

31. Гипербола имеет:

- А) действительную и мнимую оси;
Б) только действительную ось;
В) только мнимую ось.

32. Эллипс имеет:

- А) только большую ось;
Б) только малую ось;
В) большую и малую ось.

Вариант 2

1. Вектором называется:

- А) направленный луч;
Б) направленный отрезок;
В) направленный промежуток.

2. Два вектора называются равными, если:

- А) они совмещаются поворотом;
Б) они совмещаются с помощью симметрии;
В) они совмещаются параллельным переносом.

3. Сложение ненулевых векторов можно выполнить по правилу:

- А) треугольника, параллелограмма, многоугольника;
Б) треугольника, прямоугольника, многоугольника;
В) треугольника, трапеции, многоугольника.

4. Углом между двумя ненулевыми векторами называется угол

- А) между осями;
Б) между направлениями этих векторов и имеет градусную меру больше 0, но меньше 180 градусов;
В) между направлениями этих векторов и имеет градусную меру больше 90, но меньше 180 градусов.

5. Два вектора называются коллинеарными, если:

- А) они лежат на перпендикулярных прямых;
- Б) они лежат не на одной прямой;
- В) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

6. Два ненулевых вектора могут быть:

- А) сонаправленными или противоположно направленными;
- Б) симметричными и противоположно направленными;
- В) соразмерными и противоположно направленными.

7. Вектор называется единичным, если:

- А) его направление совпадает с направлением оси;
- Б) имеет длину и совпадает с направлением оси;
- В) имеет длину, равную единице, и направление, совпадающее с направлением оси.

8. Прямоугольным базисом называется:

- А) пара единичных взаимно перпендикулярных векторов \vec{i} и \vec{j} ;
- Б) пара единичных векторов \vec{i} и \vec{j} , отложенных от некоторого начала – точки О;
- В) пара единичных взаимно перпендикулярных векторов \vec{i} и \vec{j} , отложенных от некоторого начала – точки О.

9. Углом между ненулевым вектором и осью называется угол

- А) между осями;
- Б) между направлением оси и вектора и имеет градусную меру больше 90, но меньше 180 градусов;
- В) между направлением оси и вектора и имеет градусную меру больше 0, но меньше 180 градусов.

10. Скалярное произведение в координатах равно:

- А) сумме соответствующих координат векторов;
- Б) разности соответствующих координат векторов;
- В) произведению соответствующих координат векторов.

11. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется:

- А) вектор, равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;
- Б) число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;
- В) число, равное сумме длин этих векторов на косинус угла между ними.

12. Уравнение $x = a$, это:

- А) уравнение оси Ox ;
- Б) уравнение прямой, параллельной оси Ox ;
- В) уравнение прямой, параллельной оси Oy .

13. Уравнение $y = \theta$, это:

- А) уравнение оси Ox ;
- Б) уравнение прямой, параллельной оси Ox ;
- В) уравнение прямой, параллельной оси Oy .

14. Расстояние между двумя точками вычисляется по формуле:

- А) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$;
- Б) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;
- В) $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

15. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид:

- А) $y = kx + b$;
- Б) $y = kx$;
- В) $y = kx + 2b$.

16. Уравнение окружности с центром в произвольной точке имеет вид:

- А) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$;
- Б) $(x + a)^2 + (y + b)^2 = R^2$;

B) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

17. Фокусами называются

- A) точки, лежащие на оси Оу на заданном расстоянии от начала координат;
- Б) точки, лежащие на оси Ох на заданном расстоянии от начала координат;
- В) точки, лежащие на заданном расстоянии от начала координат.

18. Не имеет центра симметрии:

- А) эллипс;
- Б) гипербола;
- В) парабола.

19. Эллипсом называется

- А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
- Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
- В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

20. Гиперболой называется

- А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
- Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
- В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

21. Параболой называется

- А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
- Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
- В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

22. Уравнение эллипса имеет вид:

А) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

Б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

23. Уравнение параболы имеет вид:

А) $y^2 = 2px$;

Б) $y = 2px$;

В) $y^2 = px$.

24. Уравнение гиперболы имеет вид:

А) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

25. Вершиной параболы называется

- А) точка пересечения оси параболы с кривой;
- Б) точка пересечения оси параболы с директрисой;
- В) точка пересечения фокуса с кривой.

26. Центром эллипса является:

- А) вершина эллипса;
- Б) фокус эллипса;
- В) центр симметрии эллипса.

27. Парабола имеет:

- А) две оси симметрии;
- Б) одну ось симметрии;
- В) три оси симметрии.

28. Эксцентрикитетом эллипса e , где $0 < e < 1$ называется

- А) величина $e = \frac{a}{c}$;
- Б) величина $e = \frac{c}{b}$;
- В) величина $e = \frac{c}{a}$.

29. Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид:

- А) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$;
- Б) $x^2 + y^2 = R^2$;
- В) $x^2 - y^2 = R^2$.

30. Эллипс имеет:

- А) только большую ось;
- Б) только малую ось;
- В) большую и малую ось.

31. Гипербола имеет:

- А) действительную и мнимую оси;
- Б) только действительную ось;
- В) только мнимую ось.

32. Окружностью называется:

- А) геометрическое место точек;
- Б) геометрическое место точек, удаленных от центра;
- В) геометрическое место точек, одинаково удаленных от центра.

Бланк ответов теста, вариант №1**Бланк ответов теста, вариант №2**

1.	A	Б	В		1.	A	Б	В
2.	A	Б	В		2.	A	Б	В
3.	A	Б	В		3.	A	Б	В
4.	A	Б	В		4.	A	Б	В
5.	A	Б	В		5.	A	Б	В
6.	A	Б	В		6.	A	Б	В
7.	A	Б	В		7.	A	Б	В
8.	A	Б	В		8.	A	Б	В
9.	A	Б	В		9.	A	Б	В
10.	A	Б	В		10.	A	Б	В
11.	A	Б	В		11.	A	Б	В
12.	A	Б	В		12.	A	Б	В
13.	A	Б	В		13.	A	Б	В
14.	A	Б	В		14.	A	Б	В
15.	A	Б	В		15.	A	Б	В
16.	A	Б	В		16.	A	Б	В
17.	A	Б	В		17.	A	Б	В
18.	A	Б	В		18.	A	Б	В
19.	A	Б	В		19.	A	Б	В
20.	A	Б	В		20.	A	Б	В
21.	A	Б	В		21.	A	Б	В
22.	A	Б	В		22.	A	Б	В
23.	A	Б	В		23.	A	Б	В
24.	A	Б	В		24.	A	Б	В
25.	A	Б	В		25.	A	Б	В
26.	A	Б	В		26.	A	Б	В
27.	A	Б	В		27.	A	Б	В
28.	A	Б	В		28.	A	Б	В
29.	A	Б	В		29.	A	Б	В
30.	A	Б	В		30.	A	Б	В
31.	A	Б	В		31.	A	Б	В
32.	A	Б	В		32.	A	Б	В

Самостоятельная работа по теме «Кривые второго порядка»

Цель: приводить уравнения линий второго порядка к простейшему (каноническому) виду путем преобразования систем координат; строить данную линию по ее каноническому уравнению.

Задание: построить графики функций. Всего 22 варианта, по 4 задания.

Критерии оценки: «5» выполнены все задания; «4» -3 задания; «3» -2 задания;

«2» выполнено менее 1 задания.

Методические указания:

1. Кривые второго порядка

1.1. Кривые, заданные в декартовых координатах

Линия первого порядка на плоскости определяется алгебраическим уравнением первой степени относительно декартовых координат x и y :

$$Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) определяет прямую на плоскости.

Линия второго порядка на плоскости определяется алгебраическим уравнением второй степени относительно переменных x и y :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (2)$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю.

Уравнение (2) определяет кривую линию, которая называется кривой второго порядка. Это может быть окружность, эллипс, гипербола, парабола и их вырождения.

В аналитической геометрии всякая кривая определяется как геометрическое место точек.

Рассмотрим кривые второго порядка.

Окружность

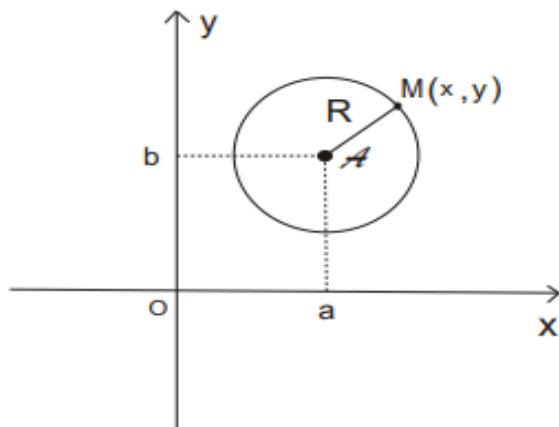


Рис. 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Окружностью называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, расстояние которых до данной точки $A(a, b)$ этой плоскости (называемой центром этой окружности) есть величина постоянная R (называемая радиусом этой окружности) (рис. 1).

Уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

При $a = b = 0$ получим уравнение окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$. При $R = 0$ данные окружности вырождаются в точки с координатами соответственно (a, b) и $(0, 0)$.

Эллипс

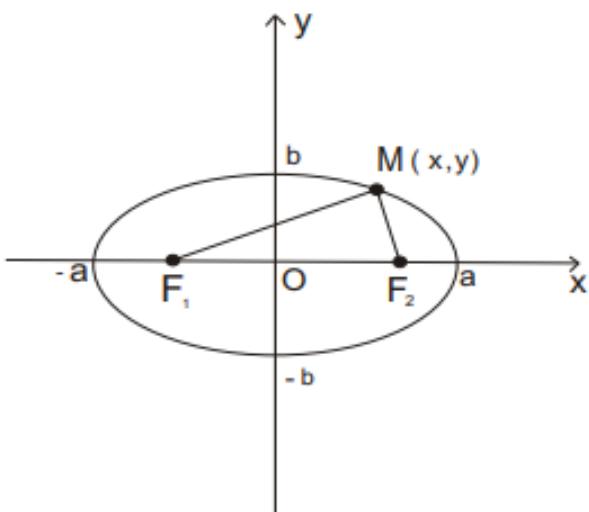


Рис. 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Эллипсом называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости (называемых фокусами этого эллипса) есть величина постоянная (рис. 2).

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется каноническим уравнением эллипса, где a — большая полуось, b — малая полуось эллипса.

Вырождения эллипса:

1) уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ определяет мнимый эллипс;

Гипербола

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Гиперболой называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости (называемых фокусами этой гиперболы) есть величина постоянная (рис. 3).

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется каноническим уравнением гиперболы, где a — действительная ось, b — мнимая ось гиперболы.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ представляет сопряжённую с данной гиперболу.

Вырождения гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ или $(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 0$. Имеем пару пересекающихся прямых: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ и $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b}$.

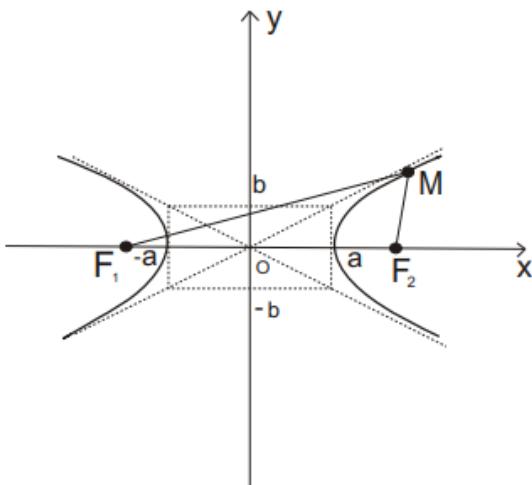


Рис. 3

Парабола

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Параболой называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, равноотстоящих от данной точки F этой плоскости (называемой фокусом) и данной прямой (называемой директрисой параболы), предполагая, что на ней не лежит эта точка F (рис. 4).

Уравнение $y^2 = 2px$ называется каноническим уравнением параболы, где p ($p > 0$) — параметр параболы.

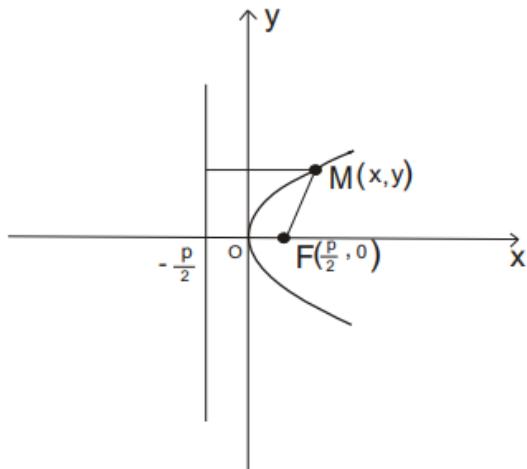


Рис. 4

Уравнение $x^2 = 2py$ определяет параболу, симметричную относительно оси Oy .

Вырождения параболы: при $p = 0$ получим:

- 1) уравнение $y^2 = 0$, которое определяет дважды совмещённую ось Ox ;
- 2) $x^2 = 0$ есть дважды совмещённая ось Oy .

Пример решения задачи

Задача. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2 порядка, найти все ее параметры, построить кривую.

$$9x^2 - 4y^2 - 90x - 8y + 185 = 0$$

Решение. Приведем уравнение кривой к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 4y^2 - 90x - 8y + 185 &= 0, \\ 9(x^2 - 10x) - 4(y^2 + 2y) + 185 &= 0, \\ 9(x^2 - 10x + 25) - 4(y^2 + 2y + 1) &= -185 + 225 - 4, \\ 9(x-5)^2 - 4(y+1)^2 &= 36, \\ \frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} &= 1, \\ \frac{(x-5)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} &= 1. \end{aligned}$$

Получили каноническое уравнение гиперболы $\frac{(x-5)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$ с центром в точке $O(5; -1)$ и полуосами $a = 2$, $b = 3$.

Асимптоты гиперболы:

$$\begin{aligned} y + 1 &= \pm \frac{b}{a}(x - 5), \\ y &= \pm \frac{3}{2}(x - 5) - 1. \end{aligned}$$

Параметр c : $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$, $c = \sqrt{13}$.

Тогда фокусы гиперболы расположены в точках:

$$F_1(c+5, -1) = F_1(\sqrt{13} + 5, -1) \text{ и } F_2(-c+5, -1) = F_2(-\sqrt{13} + 5, -1).$$

Эксцентриситет гиперболы: $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8 > 1$.

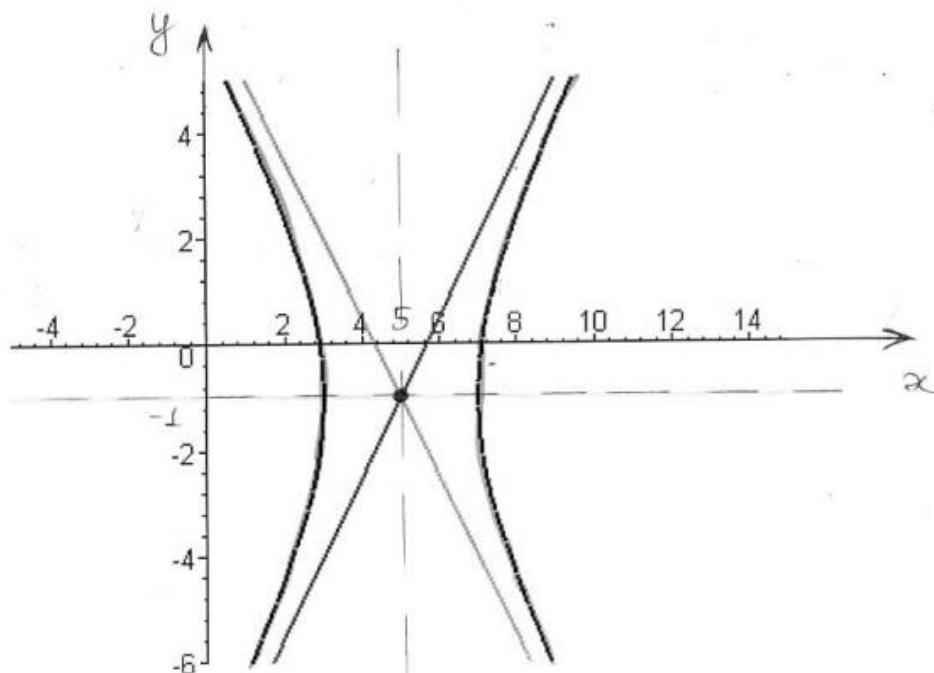
Директрисы гиперболы:

$$x - 5 = \pm \frac{a}{\epsilon},$$

$$x = \pm \frac{4}{\sqrt{13}} + 5.$$

Сделаем чертеж. Начертим гиперболу и ее асимптоты, отметим центр

$$O(5; -1)$$



Задание 1.

Построить кривые следующих уравнений:

1.1.

1. $x^2 - 2x + y^2 - 4x = 4$.
2. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$.
3. $5x^2 - 10y^2 - 50 = 0$.
4. $6x^2 - 3y = 0$.

1.2.

1. $x^2 - 8x + y^2 - 4y - 7 = 0$.
2. $x^2 + 5y^2 - 20 = 0$.
3. $7x^2 - 2y^2 - 14 = 0$.
4. $3y^2 - 9x = 0$.

1.3.

1. $x^2 + y^2 - 5x = 0$.
2. $2x^2 + 3y^2 + 12 = 0$.
3. $4x^2 - y^2 - 6 = 0$.
4. $5x^2 - 3y = 0$.

1.4.

1. $x^2 + y^2 - 7y = 0$.
2. $x^2 + 5y^2 - 10 = 0$.
3. $5x^2 - 10y^2 + 10 = 0$.
4. $x^2 - 8y = 0$.

1.5.

1. $x^2 - 3x + y^2 - 5y = 0$.
2. $3x^2 + 5y^2 = 60$.
3. $4x^2 - 8y^2 - 32 = 0$.
4. $9y^2 + 5x = 0$.

1.6.

1. $x^2 + 8x + y^2 + 2y - 17 = 0$.
2. $5x^2 + 15y^2 = 3$.
3. $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$.
4. $3y - 5x^2 = 0$.

1.7.

1. $x^2 - 7x + y^2 - 8y = 30$.
2. $3x^2 + 7y^2 = 21$.
3. $5x^2 - 6y^2 = 0$.
4. $7x - 9y^2 = 0$.

1.8.

1. $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 13 = 0$.
2. $5x^2 + 7y^2 + 35 = 0$.
3. $2x^2 - 4y^2 - 8 = 0$.
4. $2x^2 - 3y = 0$.

1.9.

1. $x^2 - 5x + y^2 - 6y = 10$.
2. $3x^2 + 4y^2 - 24 = 0$.
3. $4x^2 - 7y^2 - 28 = 0$.
4. $8y - 5x^2 = 0$.

1.10.

1. $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 11$.
2. $2x^2 + 7y^2 - 14 = 0$.
3. $5x^2 - 8y^2 - 40 = 0$.
4. $9x - 5y^2 = 0$.

1.11.

1. $x^2 - 3x + y^2 - 5x = 5$.
2. $4x^2 + 5y^2 - 13 = 0$.
3. $6x^2 - 11y^2 - 60 = 0$.
4. $7x^2 - 4y = 0$.

1.12.

1. $x^2 - 9x + y^2 - 5y - 8 = 0$.
2. $x^2 - 6y^2 - 30 = 0$.
3. $8x^2 - 3y^2 - 23 = 0$.
4. $4y^2 - 8x = 0$.

Форма работы: письменно в тетради**Контрольные вопросы:**

1. Вывести каноническое уравнение параболы
2. Вывести уравнение окружности.
3. Вывести каноническое уравнение эллипса

РАЗДЕЛ 3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ТЕМА 3.1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Самостоятельная работа по теме «Задачи теории вероятностей»

Цель: закрепление знаний изученного материала. Использовать изученные формулы при решении задач и упражнений.

Задание: 1. Решить задачи . 2 варианта, по 5 задач в каждом.

Критерии оценки: «5» выполнены все 5 заданий; «4» выполнены 4 задания; «3» выполнено 3 задания; «2» выполнено менее 2 заданий.

Методические указания: разобрать примеры решения задач

Задача 1 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет "дубль".

Решение. Каждый исход опыта можно представить как упорядоченную пару чисел (m,n) , где m -число очков выпавших на первой кости, n -число очков на второй. Каждая из 6 граней одной игральной кости может выпасть с любой из 6 граней другой. Следовательно, всех элементарных исходов, равновозможных и взаимоисключающих друг друга, будет $n=6 \cdot 6 = 36$.

Событие A - выпадение "дубля" - происходит тогда и только тогда, когда наступает один из исходов: (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6). Таким образом $m_A=6$.

Следовательно,

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Задача 2 Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Решение. Две последние цифры можно набрать числом способов, равным числу упорядоченных двухэлементных подмножеств у десятиэлементного множества $\{0,1,\dots,9\}$. Это число способов равно A_{10}^2 . Благоприятствует событию А (цифры набраны верно) только один исход. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}.$$

Задача 3 В подгруппе 13 студентов. Из них восемь учатся на хорошо и отлично. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 5 студентов учатся на хорошо и отлично.

Решение. Пусть A событие состоящее в том, что среди 9 отобранных учатся на хорошо и отлично 5 студентов; $n=C_{13}^9$ - общее число случаев, по которым можно отобрать 9 из 13; $m_A = C_5^4 \cdot C_8^5$ - число случаев благоприятствующих событию A , так как среди отобранных 9, 5 отличников и 4 студента не являются отличниками. Вероятность события А будет

$$P(A) = \frac{m_A}{n}; \quad P(A) = \frac{C_8^5 \cdot C_5^4}{C_{13}^9} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{13!}{4!9!} = \frac{56}{143}.$$

Вариант 1.

- 1) В группе туристов 10 человек. С помощью жребия они выбирают четырёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?
- 2) Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,9. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,88. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.
- 3) В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОРР (в первый раз выпадает орёл, во второй и третий — решка).
- 4) Биатлонист 3 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

5) Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 24% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Вариант 2.

- 1) На борту самолёта 15 мест рядом с запасными выходами и 25 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир Б. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру Б. достанется удобное место, если всего в самолёте 400 мест.
- 2) Вероятность того, что новый пылесос в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,079. В некотором городе из 1000 проданных пылесосов в течение года в гарантийную мастерскую поступило 86 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?
- 3) В группе туристов 25 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Н. полетит вторым рейсом вертолёта.
- 4) По отзывам покупателей Игорь оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,86. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.
- 5) Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60% этих стекол, вторая – 40%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Форма работы: письменно в тетради

Ответы:

	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
Вариант 1	0,4	0,02	0,125	0,13	0,46
Вариант 2	0,1	0,007	0,2	0,028	0,024

ТЕМА 3.2 Математическая статистика

Самостоятельная работа по теме «Математическая статистика»

Цель: закрепление теоретических знаний изученного материала. Работа с литературой по математике

Задание: ответить письменно на вопросы по учебнику и дополнительным источникам.

Критерии оценки: «5» - вопросы раскрыты полностью, точно обозначены основные понятия и характеристики по теме; «4» - вопросы раскрыты, однако нет полного описания всех необходимых элементов; «3» - вопросы раскрыты не полно, присутствуют грубые ошибки, однако есть некоторое понимание раскрываемых понятий; «2» - ответы на вопросы отсутствуют или в целом не верны.

Методические указания: используй учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И.Башмаков.- 4-е изд., стер.- М. : Издательский центр «Академия», 2016. - 256 с. Глава 11. «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

Вопросы для самоконтроля

1. Чем занимается математическая статистика?
2. В чем состоит основная задача математической статистики?
3. Что такое генеральная совокупность?
4. Что называется выборочной совокупностью (выборкой)?
5. Что называется объемом совокупности?
6. В чем польза использования выборок?
7. Почему прибегают к выборочному исследованию при контроле качества ампул для инъекций? Лампочек? Телефонов? ...
8. Результаты переписи населения, проводимой в стране, являются генеральной совокупностью или выборкой?
9. Какая выборка называется повторной (выборка с возвращением)?
10. Какая выборка называется бесповторной (выборка без возвращения)?

Форма работы: письменно в тетради

Самостоятельная работа «Итоговая работа по математике»

Цель: проверить сформированность знаний, умений, навыков обучающихся; выявить уровень математической подготовки для определения уровня обученности по дисциплине: ОУДп.11

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия обучающихся 2 курса.

Задание: выполнить задания итоговой работы. Всего 2 варианта. Провести проверку по модельным ответам, проанализировать допущенные ошибки.

Критерии оценки: «5» выполнены все 10 заданий; «4» выполнены 8-9 заданий; «3» выполнено 5-7 заданий; «2» выполнено менее 5 заданий

Методические указания: используй конспекты лекций, справочные материалы, учебники.

I вариант

1. Определи, какова вероятность, что случайно названное двузначное число делится на 26 ? *Запиши сокращённую дробь!* Определи, какова вероятность, что случайно названное двузначное число не делится на 26 ? *Запиши сокращённую дробь!*
2. Данна функция $-9x^7+3x+6$. Вычислите её производную.

- 1) $-63x^6+3$ 2) $63x^6+3$ 3) $-63x^6+3x$ 4) $-63x^6+3+6$

3. Вычислите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=9\sin x+2x$ в точке с абсциссой $x_0=-\pi/2$.

- 1) 6 2) 8 3) -4 4) 2

4. Периметр прямоугольника составляет 84 см. Найдите каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

- 1) 22 2) 20 3) 21 4) 23

5. Напиши уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+4x+8$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

6. Вычислите точки экстремума заданной функции и исследуй их характер:
 $y=2x-4\cos x$, $x \in [-\pi/2; \pi]$

7. Данна функция $f(x)=2x^4+2x^5$. Запишите общий вид первообразных функций.

- 1) $0,4x^5+1/3x^6+c$ 2) $2x^5+2x^6+c$ 3) $8x^5+10x^6$ 4) $10x^5+12x^6+c$

8. Найди площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)=3x^2$, прямыми $y=0$, $x=2$ и $x=6$.

- 1) 210 2) 60 3) 208 4) 130

9. Реши иррациональное уравнение: $x+\sqrt{18+x^2}=3$

- 1) 2 2) 1 3) 1,5 4) -1,5

10. Реши систему уравнений. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}x - \log_{\frac{1}{3}}y = -2 \\ y^2 - x = 10 \end{cases}$

- 1) (90; 10) 2) (9; 1) 3) (9; 99) 4) (80; 10)

П вариант

1. Определи, какова вероятность, что случайно названное двузначное число делится на 29 ? Запиши сокращённую дробь! Определи, какова вероятность, что случайно названное двузначное число не делится на 29 ? Запиши сокращённую дробь!
2. Данна функция $5x^8+4x-5$. Вычислите её производную.

1) $-40x^7+4$ 2) $40x^7+4$ 3) $40x^7+4x$ 4) $40x^7+4-5$
3. Вычислите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=14\sin x+7x$ в точке с абсциссой $x_0=\pi/2$.

1) 16 2) 7 3) -16 4) 4
4. Периметр прямоугольника составляет 40 см. Определите каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

1) 10 2) 11 3) 12 4) 9
5. Напиши уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+5x+5$ в точке с абсциссой $x_0=2$.
6. Вычислите точки экстремума заданной функции и укажи их характер:
 $y=\sqrt{3}x - 2 \cos x$, $x \in [-\pi/2; \pi]$
7. Данна функция $f(x)=3x^4-5x^6$. Запишите общий вид первообразных функций.

1) x^3-x^5+c 2) $0,6x^5-5/7x^7+c$ 3) $3/4x^5-5/6x^7+c$ 4) $3x^4-5x^6+c$
8. Определи площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)=6x^2$, прямыми $y=0$, $x=3$ и $x=7$.

1) 348 2) 480 3) 632 4) 394
9. Реши иррациональное уравнение: $x + \sqrt{4 + x^2} = 2$

1) -2 2) 1 3) 2 4) 0
10. Реши систему уравнений.

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}x - \log_{\frac{1}{3}}y = -1 \\ y^2 - x = 4 \end{cases}$$

1) (4; 12) 2) (-12; -4) 3) (-1; -3) 4) (12; 4)

Модельные ответы:

№	Вариант 1	Вариант 2
1	$\frac{1}{30}; \frac{29}{30}$	$\frac{1}{30}; \frac{29}{30}$
2	1	2
3	4	2
4	3	1
5	$y=8x+4$	$y=9x+1$
6	$X_{\min} = \frac{\pi}{6}$	$X_{\min} = \frac{\pi}{3}$
7	1	2
8	3	3
9	3	4
10	1	1

Литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И.Башмаков.- 4-е изд., стер.- М. : Издательский центр «Академия», 2016. -256 с.
- 2.Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Задачник : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И.Башмаков.- М. : Издательский центр «Академия», 2016. -416с.
- 3.Богомолов Н. В. Математика: Учеб. для ссузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - М : Дрофа, 2014. - 400 с.: ил.
- 4.Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для средних спец. учеб. заведений/ Н. В. Богомолов. – 6-е изд., стер.- М : Высш. шк., 2014. - 495 с.
- 5.Богомолов, Н. В. Сборник дидактических заданий по математике:учеб. пособие для ссузов./ Н. В. Богомолов, Л. Ю. Сергиенко. -4-е изд., стереотип. М. : Дрофа, 2014. – 236, [4] с.ил.

Дополнительная:

- 1.Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: учеб.для 10-11кл. ср. шк./Москва: Просвещение 2010-319с.
- 2.Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа: учеб.для 10-11кл. ср. шк./Москва: Мнемозина 2013-375с.

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.bookomama.ru/uchebniki-i-posobij/posobij/1861-matematika-srednee-professional-noe-obrazovanie-n-v-bogomol.html>
2. <http://currencyex.ru/knigi/novinki/4272-sbornik-zadach-po-matematike-n-v-bogomolov.html>
3. <http://www.eeeppp.ru/hudohestvennwe/1965-reshebnik-po-matematike-bogomolov.html>
4. <http://selectme.ru/uchebniki-i-posobij/3105-matematika-srednee-professional-noe-obrazovanie-n-v-bogomol.html>
5. <http://www.gofuckit.ru/biblioteka/elektronnwe/3105-bogomolov-prakticheskie-zanij-po-matematike.html>