Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

«Кудымкарский лесотехнический техникум»

Методические указания по выполнению
самостоятельной работы

по УД ЕН.01 МАТЕМАТИКА

по специальности: 35.02.03 Технология деревообработки

2016 год

РАССМОТРЕНО:
на заседании ПЦК
Председатель ПЦК Никитина М.М.. _____________
Пр №1 от 30.08.2016

Автор-составитель:
Л.Г.Дзюба, преподаватель высшей квалификационной категории

Методические указания по выполнению самостоятельной работы для студентов составлены в соответстивии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика», разработанной по специальности: 35.02.03 Технология деревообработки

Зарегистрировано:

№___от «____»________2019

Содержание

Предисловие

Методические указания по выполнению самостоятельной работы по УД ЕН.01 МАТЕМАТИКА предназначены для студентов 2 курса по специальности: 35.02.03 Технология деревообработки

Выполнение самостоятельной работы является обязательной для каждого студента.

Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний студентов;

- углубления и расширения теоретических знаний;

-развития познавательных способностей и активности студентов, самостоятельности, ответственности и организованности;

-формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. По математике используются следующие виды заданий для самостоятельной работы- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, дополнительной литературы), работа со словарями и справочниками, учебно-исследовательская работа, использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и Интернета; для закрепления и систематизации знаний: повторная работа над учебным материалом (учебника, дополнительной литературы, аудио- и видеозаписей), составление плана и алгоритма решения, составление таблиц для систематизации учебного материала, ответы на контрольные вопросы, подготовка сообщений к выступлению на уроке, конференции, подготовка сообщений, докладов, рефератов, тематических кроссвордов, презентаций.

Дидактические единицы «уметь» и «знать»

В результате изучения УД ЕН.01 МАТЕМАТИКА обучающийся должен освоить следующие дидактические единицы:

Коды	Наименования дидактических единиц (освоенные У и усвоенные З)
У 1	применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;
У2	применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;
У3	решать прикладные технические задачи
У4	использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;
З1	основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств

Профессиональные и общие компетенции

Освоение программы УД ЕН.01 МАТЕМАТИКА способствует формированию у обучающихся следующих компетенций:

Перечень профессиональных компетенций

ПК 1.1. Проводить геодезические и таксационные измерения.

ПК 1.2. Планировать и организовывать технологические процессы заготовки и хранения древесины, выбирать лесозаготовительную технику и оборудование в рамках структурного подразделении.

ПК 1.3. Выбирать технологию и систему машин для комплексной переработки низкокачественной древесины и отходов лесозаготовок в рамках структурного подразделении.

ПК 2.1. Планировать и организовывать технологические процессы строительства временных лесотранспортных путей и обеспечивать их эксплуатацию.

ПК 2.2. Обеспечивать эксплуатацию лесотранспортных средств.

ПК 2.3. Организовывать перевозки лесопродукции.

ПК 3.1. Участвовать в планировании и организации работы структурного подразделения.

ПК 3.2. Участвовать в управлении выполнением поставленных задач в рамках структурного подразделения.

ПК 3.3. Оценивать и корректировать деятельность структурного подразделения.

Перечень общих компетенций

ОК 1.Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК7.Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий

ОК8.Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК9.Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

Наименование разделов и тем	Самостоятельная работа обучающихся	Объем часов
1	2	3
Раздел 1. Математический анализ		
Тема 1.1. Пределы и непрерывность	Предел. Свойства пределов. Предел. Вычисление пределов функции Техника вычисления пределов функций	5
Тема 1.2. Производная функции	Производная. Правила дифференцирования. Правила дифференцирования. Вычисление производной. Производная. Техника дифференцирования. Производная сложной функции. Производная и дифференцирование.	6
Тема 1.3. Приложение производной	Исследование функции по первой производной. Свойства функции. Построение графика функции. Исследование функции с помощью производной. Уравнение касательной к графику функции.	6
Тема 1.4. Интеграл	Первообразная. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Определенный интеграл. Интегральное исчисление. Интеграл и его приложения. Вычисление интегралов. Нахождение площади криволинейной трапеции Интеграл и его приложения. Вычисление объема тел вращения	9
Раздел 2.Линейная алгебра		
Тема 2.1. Матрицы и определители	Матрицы Операции с матрицами. Вычисление определителей	3
Тема 2.2. Системы линейных уравнений	Линейная алгебра Итоговая проверочная работа	4

Раздел 3. **Теория вероятностей и математическая статистика**		
Тема 3.1. Теория вероятностей	Теория вероятностей	2
Тема 3.2. Математическая статистика	Математическая статистика	2
Раздел 4. Аналитическая геометрия	Аналитическая геометрия на плоскости	
Тема 4.1 Аналитическая геометрия на плоскости	Кривые второго порядка Итоговая работа по математике	5
	Всего	**42час**

ТЕМА 1.1. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Самостоятельная работа по теме «Предел. Свойства пределов»

Цель: - систематизация и закрепление полученных теоретических знаний по теме «Предел. Свойства пределов»;

Задание: 1. Письменно ответить на вопросы, используя учебник - Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования /М.И.Башмаков.-4-е изд., стер.-М. :Издательский центр «Академия»,2017.-256с. Стр. 165

Критерии оценки: «5» - вопросы раскрыты полностью, точно обозначены основные понятия и формулы по теме; «4» - вопросы раскрыты, однако нет полного описания всех необходимых элементов; «3» - вопросы раскрыты не полно, присутствуют грубые ошибки, однако есть некоторое понимание раскрываемых понятий; «2» - ответы на вопросы отсутствуют или в целом не верны.

Методические указания: работа с литературой. Прочитай, выбери главное. Сформулируй ответ. Ответ должен быть четким и кратким, содержащим все основные характеристики описываемого понятия, категории.

Вопросы:

1. Дайте определение предела переменной величины. Перечислите, свойства пределов.
2. Как прочитать запись $\mathbf{lim}_a\, \boldsymbol{f(x) = b}$? Дайте определение предела функции в точке.
3. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
4. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
5. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните основной метод раскрытия неопределенности ∞/∞
6. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные пределы

Форма работы: письменная работа в тетради

Самостоятельная работа по теме
«Предел. Вычисление пределов функции»

Цель: закрепить навыки, полученные на занятии при решении упражнений; отработка техники вычисления пределов: сформировать умение производить вычисление пределов; научиться вычислять пределы функции с различными видами неопределенностей
Задание: вычислить пределы.

Критерии оценки:«5» верно выполнено8 заданий; «4» верно выполнено 6-7 заданий; «3» верно выполнено 4-5 заданий; «2» выполнено менее 4 заданий

Методические указания:

Техника вычисления пределов.

Пример №1. *Найти* $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+2x}{3x-3}$. *Решение.* $\lim_{x\to 3}\frac{3^3+2\cdot 3}{3\cdot 3-3}=\frac{33}{6}=10{,}5.$

Пример№2. *Найти* $\lim_{x\to 4}\frac{5}{3x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{5}{0}=\infty.$

Пример №3. *Найти* $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x^2+x}=\frac{0}{0}$ (неопределенность). *Однако из этого не следует, что данная функция не имеет предела. Вынесем за скобки X и разделим числитель и знаменатель на X, что допустимо так как x*$\neq$ 0 *до перехода к предельному значению. Тогда получим*
$\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+3)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3}{x+1}=3.$

Пример №4. *Найти*
$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2^2+2-6}{2-2}=\frac{0}{0}$ (неопределенность). *Разложим числитель на линейные множители* $x^2+x-6=0.$

$X_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 5}{2}$ $x_1=-3,\ X_2=2$

Следовательно, $x^2+x-6=(x-2)(x+3).$

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+3=5.$

Пример №5. *Найти* $\lim_{x\to 12}\frac{\sqrt{x+4}-4}{x-12}$. *При подстановки x=12 получим неопределенность вида* $\frac{0}{0}$. *Чтобы избавиться от неопределенности, преобразуем данную функцию, умножив числитель и знаменатель на выражение* $\sqrt{x+4}+4$. $\lim_{x\to 12}\frac{(\sqrt{x+4}-4)\cdot(\sqrt{x+4}+4)}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)}=\lim_{x\to 12}\frac{x+4-16}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)}=\frac{1}{8}$

Пример №6. *Найти* $\lim_{x\to\infty}\frac{9}{4x+5}$. *Решение* $\lim_{x\to\infty}\frac{9}{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\infty}=0.$

Пример №7. *Найти* $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+7}{7x+3}$. Решение $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+7}{7x+3}=\frac{\infty}{\infty}$ (неопределенность). Преобразуем данную функцию, разделив почленно числитель и знаменатель на неизвестную в самой большой степени. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+7}{7x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x}+\frac{7}{x}}{\frac{7x}{x}+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{7}{x}}{7+\frac{3}{x}}=\frac{5}{7}.$

Вычислить пределы:

Ход работы*:*1) Подставить вместо «х» число, к которому стремится х. Если получилось число, то предел посчитан, если получилась неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $(\infty \pm \infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$ и т.д., то

2) Воспользоваться способами раскрытия этих неопределённостей

1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{7x\ -5}{10+2x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}$;
3. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x\ +2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{11x^2-78x+7}{2x^2-9x-35}$;
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x+3}{5x-7}$;
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}$;
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^3-2x^2+3}{7x-4}$;
8. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{13x^2-2x+5}{x^4+6x+1}$.

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение предела переменной величины.

2. Как прочитать запись: $\lim_a f(x) = b$? Дайте определение предела функции в точке.

Самостоятельная работа по теме
«Техника вычисления пределов функций»

Цель: закрепить навыки, полученные на занятии при решении упражнений;
Задание: вычислить пределы**.**
Варианты выбрать по журналу, для нечетных номеров-1 вариант, для четных- 2 вариант.
Критерии оценки:«5» верно выполнено 15 заданий; «4» верно выполнено 12-14 заданий; «3» верно выполнено11-8 заданий; «2» верно выполнено менее 7 заданий.
Методические указания: запиши разобранные примеры в тетрадь и используй их при решении своего варианта самостоятельной работы.

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x-8}{x^2+5x+4}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x-8}{x^2+5x+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{10x}{x^2}-\frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{10}{x}-\frac{8}{x^2}}{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}=3$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{5x+1}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{5x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{б.м.}=\infty$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-7x+5}$

Решение:

При разложении числителя и знаменателя на множители можно производить деление многочлена на многочлен в столбик:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+2x-5 & x-1 \\ \hline -(3x^2-3x) & 3x+5 \\ 5x-5 & \\ -(5x-5) & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2x^2-7x+5 & x-1 \\ \hline -(2x^2-2x) & 2x-5 \\ -5x+5 & \\ -(-5x+5) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2+2x-5}{2x^2-7x+5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(3x+5)}{\cancel{(x-1)}(2x-5)}=\lim_{x\to1}\frac{3x+5}{2x-5}=\frac{8}{-3}=-\frac{8}{3}$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,x}{x}$

Решение:

$$\lim_{x\to0}\frac{tg\,x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1$$

Ход работы:

1)Подставить вместо «х» число, к которому стремится х. Если получилось число, то предел посчитан, если получилась неопределённость $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $(\infty\pm\infty)$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ и т.д., то

2)воспользоваться способами раскрытия этих неопределённостей

Вариант №1	**Вариант №2**
1) $\lim_{x\to 1}(2x^2-3x+4)$.	1) $\lim_{x\to -1}(x^2-5x+8)$.
2) $\lim_{x\to -2}(2x^2-3x+6)$.	2) $\lim_{x\to 1}(9x^2-3x+7)$.
3) $\lim_{x\to 5}(0{,}2x^2-x-5)$.	3) $\lim_{x\to 3}(0{,}5x^2-4x-1)$.
4) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$	4) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$
5) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$	5) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$
6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2+x-6}$	6) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3}$
7) $\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{1-\sqrt{x+3}}$	7) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$
8) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$	8) $\lim_{x\to -9}\frac{x+9}{\sqrt{x+10}-1}$
9) $\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{2-\sqrt{x-3}}$	9) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$
10) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x-4}$	10) $\lim_{x\to\infty}\frac{1x+3}{3x-4}$
11) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-3x^2+44}{6x^2-3x+7}$	11) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-3x^2+44}{x^2-3x+7}$
12) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{3x+5}$	12) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x+5}$
13) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-7}{4x+6}$	13) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-7}{x+6}$
14) $\lim_{x\to 0}\frac{9x+4}{3}$	14) $\lim_{x\to 0}\frac{7x+4}{3}$
15) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{x-3}$.	15) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{x-3}$.

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы:

1. Какие величины называются бесконечно малыми?

2. Какие величины называются бесконечно большими

ТЕМА 1.2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Самостоятельная работа по теме «Производная. Правила дифференцирования»

Цель: закрепить навыки, полученные на занятии, зная формулы дифференцирования элементарных функций
Задание:**1.**Прочитай материал параграфов: «Производная функции», «Применение производных», по учебнику Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования /М.И.Башмаков.-4-е изд., стер.-М. :Издательский центр «Академия»,2017.-256с. (стр171-180)
2.Запиши таблицы: основные формулы (стр180) и правила дифференцирования(стр177);
3.Разбери примеры с карточки 1 и реши сам (РС)
Критерии оценки:«5» верно выполнены все задания; «4» верно выполнены все задания, но есть недочеты в №3; «3» выполнены все задания, но есть не правильные ответы в №3; «2» выполнено менее половины заданий по карточке 1
Методические указания: работа с литературой. Прочитай, выбери главное. Сформулируй ответ. Ответ должен быть четким и кратким, содержащим все основные характеристики описываемого понятия, формулы, правила.

Карточка 1

1. $(C)' = 0,\ (x)' = 1,\ (x^2)' = 2x,\ (x^3)' = 3x^2,\ (x^p)' = px^{p-1}$

$(5)' = 0,\ (x^5)' = 5x^4,\ (x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5},\ (x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}\ x^{\sqrt{2}-1}$

Р. С. $(7)' =$

$(x^6)' =$

$(x^{-5})' =$

$(x^{\sqrt{3}})' =$

2. $(kx + b)' = k,\ ((kx + b)^p)' = kp(kx + b)^{p-1}$

$(2x + 3)' = 2,\ (-3x - 2)' = -3,\ ((-2x + 3)^3)' = -2 * 3 * (-2x + 3)^{3-1} = -6(-2x + 3)^2$

$((\frac{1}{2}x - 1)^2)' = \frac{1}{2} * 2\ (\frac{1}{2}x - 1)^{2-1} = (\frac{1}{2}x - 1)^1 = \frac{1}{2}x - 1$

Р. С. $(5x - 2)' =$

$(-\frac{1}{2}x + 3)' =$

$((2x + 7)^3)' =$

$((\frac{3}{4}x - \frac{1}{2})^2)' =$

$((7x + 12)^7)' =$

3. $(Cf(x))' = C * f'(x),\ (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(4x^2)' = 4 * (x^2)' = 4 * 2x^{2-1} = 8x,\ (-3x^7)' = -3(x^7)' = -3 * 7x^{7-1} = -21x^6,$

$(x^4 + 3x^2 + 4)' = (x^4)' + 3 * (x^2)' + (4)' = 4x^{4-1} + 3 * 2x^{2-1} + 0 = 4x^3 + 6x$

Р. С. $(3x^3)' =$

$(\frac{1}{2}x^4)' =$

$(7x^{15})' =$

$(x^3 + 2x)' =$

$(x^{-2} - 3x^5 + x^4 - 7)' =$

$(3x^7 + \frac{1}{2}x^4 - 11)' =$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$y = f(x)$	$y = f'(x)$	$y = f(x)$	$y = f'(x)$
$y = c\ (c - const)$	$y' = 0$	$y = ax + b$	$y' = a$
$y = x^2$	$y' = 2x$	$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = x^a$	$y' = ax^{a-1}$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы:
1. Кто является основателем теории дифференцирования?
2. Какие интересные исторические факты по производной тебе известны?

Самостоятельная работа по теме

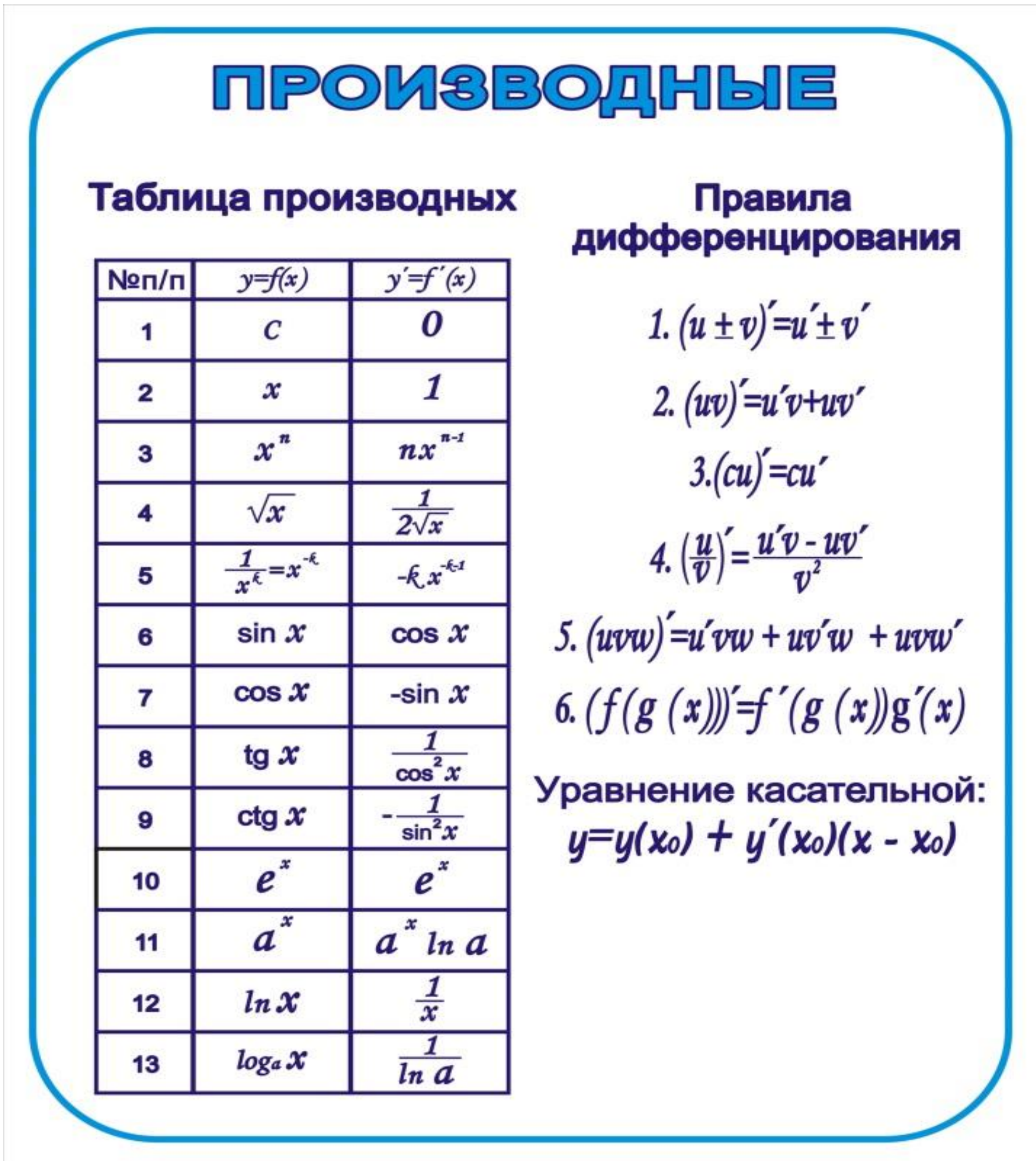
« Правила дифференцирования. Вычисление производной»

Цель: закрепить навыки вычисления производной функции.

Задание: составить задания теста. Необходимо, чтобы задание теста соответствовало одному из приведенных ответов. Ответы теста запишите в таблицу «Ответы».

Критерии оценки:«5» -верно составлены все задания теста и ответы к ним; «4» верно составлены все задания теста, но есть неверные ответы к ним или есть 1-2 недочета в заданиях; «3» верно составлены пять заданий теста и ответы к ним; «2» составление теста отсутствует

Методические указания: используй таблицы



ПРОИЗВОДНЫЕ

Таблица производных

№п/п	$y=f(x)$	$y'=f'(x)$
1	C	0
2	x	1
3	x^n	nx^{n-1}
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$\frac{1}{x^k}=x^{-k}$	$-kx^{-k-1}$
6	$\sin x$	$\cos x$
7	$\cos x$	$-\sin x$
8	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
9	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
10	e^x	e^x
11	a^x	$a^x \ln a$
12	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
13	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}$

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $(cu)' = cu'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
6. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Уравнение касательной:

$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$

Вариант 1

1. Найдите производную функции: y= ……. .

1) $12x^2$ 2)$12x$ 3) $4x^2$ 4) $12x^3$

2. Найдите производную функции y=…… .

1) -5 2)11 3) 6 4) 6x

3. Найдите производную функции y= ……. .

1) -16x 2) $-16x^2$ 3) $-16x^3$ 4) 16

4. Найдите производную функции y= ……. .

1) 1 2) $7x^2$ 3)$14x^2$ 4) 0

5. Найдите производную функции y=…….. .

1) 2) 3) 4)

6. Вычислите значение производной функции y=….. в точке x_o=2.

1) 10 2) 12 3) 8 4) 6

7. Найдите производную функции .

1) 2) 3) 4)

8. Вычислите значение производной функции y=…. в точке x_o= 4.

1) 21 2) 24 3) 0 4) 3,5

9. Вычислите значение производной функции y=…..

В точке $x_{0=\ldots..}$

Ответы :

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Форма работы: письменно в тетради; проверка работы и взаимопроверка между студентами

Контрольные вопросы:

1.Что такое производная?

2.Что такое дифференцирование?

Самостоятельная работа по теме

«Производная. Техника дифференцирования»

Цель: закрепить навыки вычисления производной функции, отработка правил дифференцирования
Задание: выполни тест. Ответы теста запишите в таблицу «Ответы», решение заданий ниже под таблицей. Варианты выбрать по списку в журнале, для нечетных номеров-1 вариант, для четных- 2 вариант.
Критерии оценки:«5» выполнены правильно все задания части А,В и есть запись решения; «4» верно выполнены все задания части А с решением; «3» верно выполнены 6-8 заданий; «2» выполнено правильно менее половины заданий.
Методические указания: используй таблицы « Таблица производных», «Правила дифференцирования» (смотри предыдущую работу по теме «Правила дифференцирования. Вычисление производной»)и примеры:

а) $y=(x^2-1)(x^4+2)$ Решение:$y'=(x^2-1)'(x^4+2)+(x^2-1)(x^4+2)'=$ $=2x(x^4+2)+4x^3(x^2-1)=2x^5+4x+4x^5-4x^3=$ $=2x^5-4x^3+4x$	б) $y=(x^3+1)\sqrt{x}$ Решение: $y'=(x^3+1)'\sqrt{x}+(x^3+1)(\sqrt{x})'=$ $=3x^2\sqrt{x}+(x^3+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=3x^2\sqrt{x}+\frac{(x^3+1)}{2\sqrt{x}}.$

Тест. Вариант 1. А1. Найдите производную функции $y=4x^3$.

1) $12x^2$ 2) $12x$ 3) $4x^2$ 4) $12x^3$

А2. Найдите производную функции $y=6x-11$.

1) -5 2) 11 3) 6 4) 6x

А3. Найдите производную функции $y=\frac{x-1}{x}$.

1) $-\frac{1}{x^2}$ 2) $\frac{x-1}{x^2}$ 3) $\frac{2x+1}{x^2}$ 4) $\frac{1}{x^2}$

А4. Найдите производную функции $y=x\sin x$.

1) $\sin x-x\cos x$; 2) $\sin x+x\cos x$; 3) $\cos x$; 4) $x+x\cos x$

А5. Найдите производную функции $y=x^2+\sin x$ в точке $x_0=\pi$

1) π^2-1 2) $2\pi+1$ 3) $2\pi-1$ 4) 2π

А6. Вычислите значение производной функции $y=\frac{x^4}{2}-\frac{3x^2}{2}+2x$ в точке $x_o=2$.

1) 10 2) 12 3) 8 4) 6

А7. Найдите производную функции $y=\sin(3x+2)$.

1) $\cos(3x+2)$;2) $-3\cos(3x+2)$; 3) $3\cos(3x+2)$; 4) $-\cos(3x+2)$

А8. Вычислите значение производной функции $y=3x^2-12\sqrt{x}$ в точке $x_o=4$.

1) 21 2) 24 3) 0 4) 3,5

А9. Вычислите значение производной функции $y=\frac{1}{2}tg(4x-\pi)+\frac{\pi}{4}$

в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$. 1) 2 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) 4 4) $\frac{\pi}{2}$

А10. Найдите производную функции $y=x^2\cos x$.

1) $2x\sin x$ 2) $-2x\sin x$ 3) $2x\cos x+x^2\sin x$ 4) $2x\cos x-x^2\sin x$

В1. Вычислите значение производной функции $y=14\sqrt{2x-3}$ в точке $x_o=26$.

В2. Найдите значение x при которых производная функции $y=\frac{x-2}{x^2}$ равна 0.

Вариант 2

A1. Найдите производную функции $y=\frac{1}{3}x^6$.

1) $2x^6$ 2) $2x^5$ 3) $\frac{1}{3}x^5$ 4) $6x^5$

A2. Найдите производную функции $y=12-5x$.

1) *7* 2) *12* 3) *-5* 4) *-5x*

A3. Найдите производную функции $y=\frac{x+3}{x}$.

1) $\frac{3}{x^2}$ 2) $\frac{2x-3}{x^2}$ 3) $-\frac{3}{x^2}$ 4) $-\frac{3}{x}$

A4. Найдите производную функции $y=x\cos x$.

1) $\cos x-x\sin x$ 2) $\cos x+x\sin x$ 3) $-\sin x$ 4) $x-\sin x$

A5. Найдите производную функции $y=x^2+\cos x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$.

1) π^2-1 2) $\pi+1$ 3) $\frac{\pi}{2}-1$ 4) $\pi-1$

A6. Вычислите значение производной функции $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+3x$ в точке $x_o=2$.

1) *13* 2) *3* 3) *8* 4) *27*

A7. Найдите производную функции $y=\cos(5x-2)$.

1) $-2\sin(5x-2)$ 2) $-5\sin(5x-2)$ 3) $5\sin(5x-2)$ 4) $\sin(5x-2)$

A8. Вычислите значение производной функции $y=\frac{3}{x}-\sqrt{x}$ в точке $x_0=\frac{1}{4}$. 1) *-47* 2) *-49* 3) *47* 4) *11,5*

A9. Вычислите значение производной функции $y=1+ctg(2x+\pi)$

в точке $x_0=-\frac{\pi}{4}$. 1) *2* 2) *-1* 3) *-2* 4) $-\frac{1}{2}$

A10. Найдите производную функции $y=x^2\sin x$.

1) $2x\cos x$ 2) $2x\sin x-x^2\cos x$ 3) $2x\sin x+x^2\cos x$ 4) $-2x\cos x$

B1. Вычислите значение производной функции $y=30\sqrt{4-3x}$ в точке x_o= *-7.*

B2. Найдите значение *x,* при которых производная функции $y=\frac{x+2}{x^2}$ равна*0.*

Форма работы: письменное решение в тетради, ответы занести в таблицу:

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2
1												
2												

Контрольные вопросы:

1.Что такое производная?

2.Что такое дифференцирование?

3.Перечисли правила дифференцирования.

Самостоятельная работа по теме

«Производная сложной функции»

Цель: закрепить навыки, полученные на занятии, зная формулы дифференцирования элементарных, тригонометрических, сложных функций

Задание: 1**.** Вычислите производные сложных функций. Представлено 2 варианта, по списку в журнале: для нечетных номеров- 1вариант, для четных номеров- 2вариант.

Критерии оценки:«5»- верно выполнены все10 заданий; «4»- верно выполнено 8-9 заданий; «3»- верно выполнено 6-7 заданий; «2» -выполнено менее половины заданий.

Методические указания:

Нахождение производных сложных функций $\left.\begin{matrix} y=f(u) \\ u=\varphi(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=f(\varphi(x))$ - сложная функция.

$\left.\begin{matrix} y=\sqrt{u} \\ u=x^2+5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=\sqrt{x^2+5}$ - сложная функция.

Производная сложной функции $y=f(\varphi(x))$ вычисляется по формуле $y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

Например:

1. $y=\sqrt{x^2+3x+4}$; $u=x^2+3x+4; y=\sqrt{u}$;

$$y'=\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{\left(x^2+3x+4\right)'}{2\sqrt{x^2+3x+4}}=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+4}}$$

2. $y=\left(23+15+x^2\right)^3; u=23+15x+x^2; y=u^3$ $y'=3u^2\cdot u'=3\left(23+15x+x^2\right)^2\cdot\left(x^2+15x+23\right)'=$
$=3\left(23+15x+x^2\right)^2\cdot(2x+15)$

Вычислите производные сложных функций:

Вариант №1

Найдите производную функции:

1. $((x^4 - x - 1)^4)'$
2. $((x^3 - 6\text{x} + 8)^6)'$
3. $((x^5 - 8x^2)^7)'$
4. $((x^6 - 5x^2 + 8x)^{10})'$
5. $((x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 1)^5)'$
6. $((x^2 + 8)^2)'$
7. $((x^2 - 5\text{x} + 8)^6)'$
8. $((\text{x}^3 - 1)^6)'$
9. $((9 - x^2)^4)'$
10. $((x^4 - x - 1)^5)'$

Вариант №2

Найдите производную функции:

1. $((5x^4 - 5x - 1)^4)'$
2. $((4x^3 - 6\text{x} + 8)^6)'$
3. $((6x^5 - 8x^2)^7)'$
4. $((5x^6 - 5x^2 + 8x)^{10})'$
5. $((4x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 1)^5)'$
6. $((7x^2 + 8)^2)'$
7. $((9x^2 - 5\text{x} + 8)^6)'$
8. $((8\text{x}^3 - 1)^6)'$
9. $((9 - 9x^2)^4)'$
10. $((5x^4 - 7x - 1)^5)'$

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы:

1.В чем заключается геометрический смысл производной?

2. В чем заключается физический смысл производной?

Самостоятельная работа по теме «Производная и дифференцирование»

Цель: получить представление об истории развития дифференциального и интегрального исчисления, об учёных, внесших вклад в развитие математического анализа; получить представление о применении производной в различных областях науки и техники, о связи математики с другими науками

Задание: 1.Подготовить презентацию по одной из тем: «Развитие дифференциального и интегрального исчисления», «Производная и её применение», «Приложение производной в производственных процессах». **2**.Работа с литературой, интернет-ресурсами.

Критерии оценки: «5»-презентация выполнена согласно требованиям к презентации, выполнены рекомендации по оформлению слайдов, нет искажений формул и математических фактов, тема раскрыта полностью; «4»- презентация выполнена согласно требованиям к презентации, выполнены рекомендации по оформлению слайдов, нет искажений формул и математических фактов, тема раскрыта не полностью; «3» презентация выполнена согласно требованиям к презентации, выполнены рекомендации по оформлению слайдов, есть искажений формул и математических фактов, тема раскрыта не полностью; «2»-задание не выполнено.

Методические указания: Требования к презентации

На первом слайде размещается:

- ✓ название презентации;
- ✓ автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);
- ✓ год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов	
Стиль	Необходимо соблюдать единый стиль оформления;
Фон	Для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	На одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; для фона и текста используются контрастные цвета; особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	Можно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде; не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	Использовать короткие слова и предложения; время глаголов должно быть везде одинаковым; заголовки должны привлекать внимание
Расположение информации на странице	Горизонтальное расположение информации; наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней.
Шрифты	Для заголовков не менее 24; для остальной информации не менее 18; для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа;
Способы выделения информации	Следует использовать: рамки, границы, заливку; разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки; рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	Не заполнять один слайд слишком большим объемом информации; наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

Форма работы: презентация, сохраненная на электронном носителе информации

Контрольные вопросы:

1.Что такое производная функции?

2.Что такое дифференцирование?

Тема 1.3.. Приложение производной
Самостоятельная работа по теме
«Исследования функции по первой производной»

Цель: закрепить навыки, полученные на занятии, зная схему исследования функции.

Задания: Найти интервалы монотонности функций; исследовать на экстремум функции;

Критерии оценки: «5»- верно выполнены все задания; «4»- верно выполнено по два задания из каждого номера; «3»-верно выполнено по одному заданию из каждого номера; «2»-верно выполнено два задания.

Методические указания:

Способность производной характеризовать скорость изменения функции (а значит, и ее графика) лежит в основе исследования функций с помощью производной и построения графика.

Для возрастающей функции (рис. 3) угол наклона касательной острый, т.е. $f\,`(x) = tg\alpha > 0$, для убывающей (рис. 4) − тупой, т.е.

$f\,'(x) = tg\alpha < 0$.

Можно по известному знаку производной судить о поведении функции.

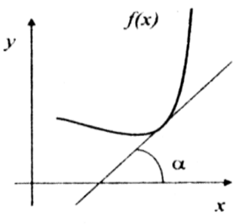


Рис.3

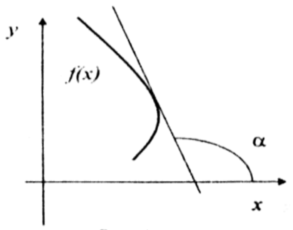


Рис. 4

Функция постоянна в каждом интервале, в котором ее производная равна нулю, возрастает в каждом интервале, где производная положительна, и убывает в тех интервалах, где производная отрицательна.

Особую роль играют так называемые критические точки из области определения функции, т.е. точки, в которых производная обращается в нуль, либо не существует.

Среди критических точек отметим точки экстремума.

Экстремумы функции

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке x_1 (рис.5), если значение функции в этой точке больше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_1 , т.е. если $f(+\Delta x) < f(x_1)$ для любых Δx, как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по модулю. Таким образом, $x= x_1$ − точка максимума, а $y_{max} = f(x_1)$ − максимум функции.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке x_2 (рис.5), если значение функции в этой точке меньше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_2 , т.е. если $f(x_2 + \Delta x) > (x_2)$ для любых Δx, как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по модулю. Таким образом, $x= x_2$ − точка минимума, а $y_{min} = f(x_2)$ − минимум функции.

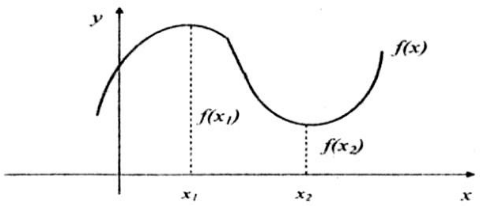


Рис.5

Для исследования функции по первой производной следует:

1 .Найти область определения функции,

2.Найти первую производную и критические точки.

3. Отметить границы области определения и критические точки на числовой прямой.

4. Исследовать знак производной в каждом из полученных интервалов.

5. Выписать точки экстремума и вычислить экстремумы функции.

Пример1 . Найти экстремумы функции $y = (1 − x)$

Решение:

1 .Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, $x \in R$.

2. Функция имеет производную всюду, поэтому определяем критические точки из условия f '(x) = 0. Находим производную.

$y' = 3(1 - x^2)^2(1 - x^2)' = 3(1 - x^2)^2(-2x) = -6x(1 - x^2)^2$

$y' = 0$; $-6x(1 - x^2)^2 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

3. Отметим эти критические точки на числовой прямой (рис.6).

4. Исследуем знак производной $y' = -6x(1 - x^2)^2$в каждом из полученных интервалов: $y'(-2) > 0$, $y'(-0{,}5) > 0$, $y'(0{,}5) < 0$, $y'(-2) < 0$.

5. Точка x = 0 − точка максимума, так как при переходе через нее слева направо производная меняет знак с плюса на минус: $y_{max} = y(0) = 1$.

Точки x = −1 и x = 1 не являются точками экстремума.

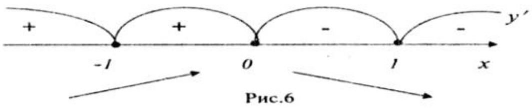


Рис.6

Можно провести исследование функции с помощью второй производной.

Если в точке $x = x_0$ первая производная равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная отлична от нуля, то $x = x_0$ − точка экстремума.

При этом если вторая производная в этой точке положительна ($f''(x_0) > 0$), то $x = x_0$ − точка минимума; если вторая производная в этой точке отрицательна ($f''(x_0) < 0$), то $x = x_0$ − точка максимума.

Для исследования функции на экстремум по первой и второй производной следует:

1. Найти область определения функции.
2. Найти первую производную функции и стационарные точки, т.е. точки, в которых она обращается в нуль.
3. Найти вторую производную и исследовать ее знак в каждой критической точке.
4. Выписать точки экстремума и вычислить (если нужно) экстремумы функции.

Пример 2. Найти экстремумы функции: $f(x)=x^3-3x^2+1$

Решение

1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $x \in R$
2. Функция имеет производную всюду, поэтому критические точки определяем из условия f ' (x) = 0.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,\ f'(x) = 0,\ 3x^2 - 6x = 0.$$

$$3x(x - 2) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

3. Находим вторую производную функции $f''(x) = 6x - 6$. Исследуем знак второй производной в каждой критической точке: $f''(0) = -6 < 0$, значит, x=0 - точка максимума,

$y_{max} = y(0) = 1$.

$f''(2) = 6 > 0$, значит, x=2 - точка минимума

$y_{min} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -3$.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Наибольшим значением функции называется самое большее, а наименьшим - самое меньшее из всех ее значений.

Функция может иметь только одно наибольшее значение и только одно наименьшее значение или может не иметь их совсем.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $a \le x \le b$, где она непрерывна, следует:

1. Найти экстремумы функции на данном отрезке.
2. Найти значение функции на концах отрезка: f(a) и f(b)
3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ на отрезке [-2;4].

Решение

1. Найдем экстремумы функции, для чего найдем производную функции и критические точки из условия $y' = 0$ $y' = 0$ при $x_1 = 0$, $x^2 - 2x - 3 = 0$,

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4\cdot(-3) = 16,\ x_{1,2} = \frac{(2\pm 4)}{2},\ x_2=-1,\ x_3=3.$$

$$y' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 - \frac{2}{3}\cdot 3x^2 - \frac{3}{2}\cdot 2x = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$$

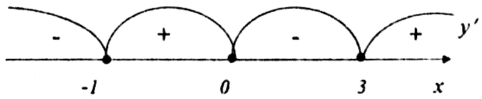


Рис.7

Отметим критические точки 1 рода $x=-1$, $x=0$, $x=3$, на числовой прямой (рис.7).

Исследуем знак производной в каждом из полученных интервалов:

y'(−2) < 0, y'(−0,5) > 0, y'(1) < 0, y'(4) < 0.

Таким образом, $y_{\min} = y(-1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$;

$y_{\max} = y(0) = 2$;

$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{4}\cdot 81 + \frac{2}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9 + 2 = -11\frac{1}{4}$.

Задания

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
Найти интервалы монотонности функций:		
а) $y = x^2 - 6x + 5$	а) $y = 2x^2 - 4x + 5$	а) $y = -x^2 - 4x + 3$
б) $y = 2x^2 - 4x + 5$	б) $y = x^2 + x + 1$	б) $y = (x-2)(x+3)$
в) $y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 7x - 8$	в) $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 5$	в) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
Исследовать на экстремум функции:		
а) $y = x^2 - 10x + 9$	а) $y = x^3 + 9x - 1$	а) $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$
б) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 7$	б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$	б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 5$
в) $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 2$	в) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	в) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 2$
г) $y = 7x^2 - 56x + 8$	г) $y = x^2 + 2x - 3$	г) $y = 3x^2 - 6x + 5$
Исследовать функции и построить их графики		
а) $y = x(2-x)^2$	а) $y = x^3 - 5x^2 + 8x$	а) $y = 2x^3 - 3x + 1$
б) $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$	б) $y = x^3 - 6x^2 + 25$	б) $y = x^3 - 3x^2 + 6x$
в) $y = x^2 + 2x - 3$	в) $y = 2x^2 - x - 3$	в) $y = 1 - x - x^2$

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы:

1. Как связаны между собой свойства функции и её производной?
2. Схема исследования функции, её основные этапы?

Самостоятельная работа теме

«Свойства функции. Построение графика функции»

Цель: совершенствование навыка решения задач по теме.
Задание:1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции; 2. Исследовать функцию и построить ее график. Работа представлена в 28 вариантах. Вариант определяется по списку в групповом журнале.
Критерии оценки:«5»-верно выполнены 2 задания; «4»-верно выполнены 2задания, но есть неточности, или не качественно выполнено построение графика; «3»-выполненно 1 задание; «2»-задание не выполнено.
Методические указания: Решение типового варианта работы:

Пример 1.
Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[0;\ 3]$.
Решение. Функция достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, либо на концах этого отрезка. Найдем критические точки (т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует):
$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$
$y' = 0$ при $x = 1 \in [0;\ 3]$ и $x = -1 \notin [0;\ 3]$
Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка
$y(1) = 2;\quad y(0) = 0;\ y(3) = -18$
Выберем из предложенных значений наибольшее и наименьшее.
Итак, наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 2 и достигается при $x = 1$, $y_{наиб}(1) = 2$, а наименьшее значение равно -18 при $x = 3$, $y_{наим}(3) = -18$.
Пример 2.
Исследовать функцию $y = \dfrac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.
Общая схема исследования функций:
1. Найти область определения функции.
2. Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.
3. Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x - 1 = 0,\ (x = 1)$
Область определения: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$
2. Т.к. $x = 1$- точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ значит $x = 1$ точка разрыва второго рода.
Следовательно, прямая $x = 1$- вертикальная асимптота.

3.Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия: Область определения симметрична относительно начала координат. $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Если $y = f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x) = \frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2} = -\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.

-Функция не является периодической

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

$$\text{с OX}: y = 0 \text{ при } x = -2;$$

$$\text{с OY}: x = 0 \text{ при } y = 2;$$

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y < 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} < 0 \Rightarrow x + 2 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2);$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x \in (-2;1) \cup (1;+\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4}x\right] = [\infty - \infty] = \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2$$

$$y = \frac{1}{4}x + 2 - \text{наклонная} \quad \text{асимптота.}$$

Для $x \to -\infty$ k и b вычисляются аналогично

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y' > 0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с “+” на “-” при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с “-” на “+” при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0, в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$y' = 0$ при $x_1 = -2,\ x_2 = 7;$

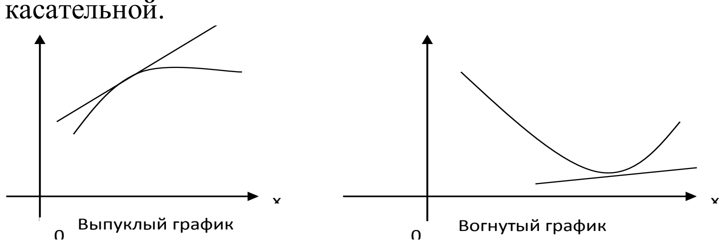
y' не существует при $x = 1$

Составим таблицу

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;7)$	7	$(7;+\infty)$
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	не существует	$\searrow$	≈ 5	$\nearrow$
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$, $(7;+\infty)$ и убывает на интервале $(1;7)$. Точка $x = 7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \frac{729}{144}$

7. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции. Напомним, что график функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a;b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже любой своей касательной. График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a;b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y'' < 0$ на интервале $(a;b)$, то график функции является выпуклым $(\cap)$ на этом интервале, если же $y'' > 0$, то на интервале $(a;b)$ график вогнутый $(\cup)$.

Найдем точки перегиба $y = f(x)$:

$$y'' = \frac{\left[2(x+2)(x-7)+(x+2)^2\right](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6} = \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

$y'' = 0$ при $x = -2$

Составим таблицу

y'' не существует при $x = 1$

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	-	0	+	не существует	+
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2;0)$- точка перегиба.

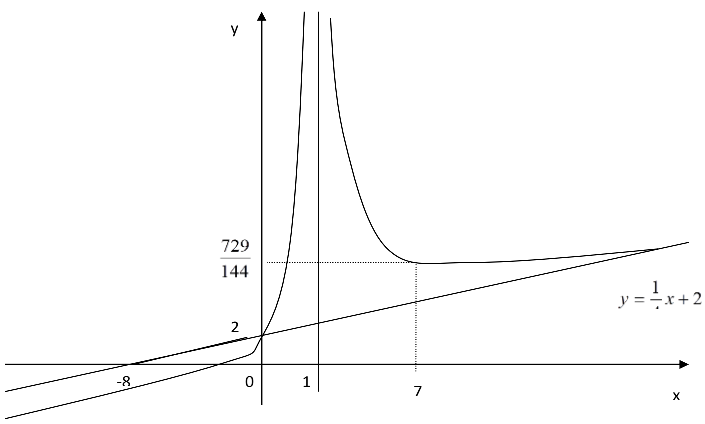
Дополнительные точки:

$y(-3) \approx -0{,}01$

$y(3) \approx 7{,}8$

$y(-6) \approx -0{,}3$

9. график функции, $y = \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$



Вариант 1

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\dfrac{x+6}{x^2+13}$; $[-5;5]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

Вариант 2

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\dfrac{x}{2}+\cos x$; $[0;\pi]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^3+16}{x}$

Вариант 3

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\dfrac{x-3}{x^2+16}$; $[-5;10]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$

Вариант 4

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\dfrac{x+3}{x^2+7}$; $[-3;7]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$

Вариант 5

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\dfrac{x}{2}-\sin x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

Вариант 6

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\dfrac{x}{x^2+16}$; $[-3;7]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

Вариант 7

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\cos x$; $[-\pi;\pi]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

Вариант 8

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\dfrac{x-4}{x^2+6}$; $[-4;6]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$

Вариант 9

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\cos x$; $[-\pi;\pi]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{3+x^2}$

Вариант 10

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\cos x-\frac{x}{\sqrt{2}};\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{2x}{1+x^2}$

Вариант 11

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=3x+x^3-1-3x^2$; $[-1;2]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x^3+3}{x}$

Вариант 12

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=x^2e^{-x}+\sqrt{3}$; $[-1;4]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x^2+4}{x}$

Вариант 13

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\frac{1}{2}+x^5-\frac{5}{3}x^3$; $[0;2]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$

Вариант 14

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\frac{x^2}{1+x}-\sqrt{2}$; $[-\frac{1}{2};4]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{x^2+5}$

Вариант 15

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=2x^2+\frac{1}{2}$; $[\frac{1}{4};1]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{2x-8}{(x-3)^3}$

Вариант 16

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=1-2x^2+x^4$; $[-2;0]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{2x}{(x-2)^2}$

Вариант 17

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\sin 2x-x-2$; $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x^4}{x^3-1}$

Вариант 18

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=x^3-3x^2-9x+3$; $[-2;3]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x+3}{2(x+2)^2}$

Вариант 19

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$; $[0;2]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{2x}{x^2+1}$

Вариант 20

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y = 3x^4 + 16x^3 + 9$; $[-3;1]$

2. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{16x^2}{x-4}$

Вариант 21

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y = x + \frac{1}{x^2}$; $[1;20]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$

Вариант 22

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y = \sin 2x - x$; $[0;\pi]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x}{3-x^2}$

Вариант 23

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y = \frac{x-1}{x^2+3}$; $[-3;3]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x}{x^2+2}$

Вариант 24

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y = \sqrt{3}x - 2\sin x$; $[0;\pi]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x^3}{3-x}$

Вариант 25

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y = \sin x - \frac{x}{2}$; $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x}{3+x^2}$

Вариант 26

1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y = \frac{1-x}{1+x}$; $[-1;1]$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{2x^3}{x-2}$

Форма работы: письменное решение в тетради

Контрольные вопросы:

1.Что значит - промежутки знакопостоянства?

2. Что значит - монотонность?

Самостоятельная работа по теме
«Исследование функции с помощью производной»

Цель: совершенствование навыка решения задач по теме.
Задание: работа представлена в двух вариантах, из трех частей. Вариант определяет преподаватель.
Критерии оценки:«5»-верно выполнены задания частей А,В,С; «4»- верно выполнены задания частей А,В; «3»-верно выполнены задания части А.
Методические указания: смотри предыдущие работы по теме 2.2. Приложение производной

Вариант № 1
Часть А
1. Сколько интервалов убывания имеет функция $f(x) = x3 – 3x$?
А. 1. Б.2. В. 3. Г. Ни одного
2. Сколько критических точек имеет функция $f(x) = x^3 – 9x^2 + 15x$
А. 2. Б.1. В. 3. Г. Ни одной
3. Значение функции $y = – x^2 + 4x + 2$ в точке максимума равно…
А. 0. Б.2. В. 6. Г.8.
4. Сумма абсцисс критических точек функции $f(x) = x^3 + 12x^2 + 21x – 6$ равна…
А. – 1. Б.7. В. – 8. Г. – 7.
5. Точкой максимума функции $f(x) =16x^3 +81x^2 – 21x-2$ является…
А. – 1. Б.3,5. В. – 3. Г. – 3,5.

Часть В.
1. Найдите тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс, если касательная проведена через точку x_0 графика функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 -3x + 1$, $x_0 =2$
2. Найдите скорость точки в момент $t_0 = 4$, если $x(t) = t^3 - 4t^2$
3. Найдите точку перегиба к графику функции $y = x^3 - 3x^2 +1$

Часть С.
1.Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3– 1$ в точке с абсциссой $x_0 = - 1$
2. Исследовать с помощью производной функцию и постройте график: $f(x) = x^3 – 3x^2 – 9x$.

Вариант № 2
Часть А
1. Сколько интервалов возрастания имеет функция $f(x) = x^3 – 3x^2$?
А. 1. Б. Ни одного. В. 2. Г. 3
2. Сколько критических точек имеет функция $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x$
А. Ни одной. Б. 3. В. 1. Г. 2.
3. Значение функции $y = 2x^2 - 8x + 11$ в точке минимума равно…
А. 0. Б.5. В. 2. Г.3.
4.Сумма абсцисс критических точек функции $f(x)=x^3-3x^2-9x-4$ равна: А – 1; Б3;В – 3;Г – 2.

5.Точкой минимума функции $f(x) = 16x^3 -27x^2 – x – 5$ является…А. 1. Б. . В. –. Г. –1

Часть В.
1. Найдите тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс, если касательная проведена через точку x_0 графика функции $y = f(x)$, где $f(x) = -x^5-2x^2 +2$, $x_0 = -1$
2. Найдите скорость точки в момент $t_0 = 4$, если $x(t) = t^2 - t + 5$
3. Найдите точку перегиба к графику функции $y = - 3x^3 +4,5x^2 + 1$

Часть С.
1.Напишите уравнение касательной к графику функции
$f(x) = x^3 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$
2. Исследовать с помощью производной функцию и постройте график $f(x) = x^3+ x^2 - 3x +1$

Форма работы: письменное решение в тетради
Контрольные вопросы:

1.Какие точки называются критическими?

2. Какие точки называются экстремальными?

Самостоятельная работа по теме
«Уравнение касательной к графику функции»

Цель: закрепить алгоритм нахождения уравнения касательной к графику функции;
Задание: **1.** Повторить алгоритм «Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке x_0=a»; разобрать пример;
2. Выполнить упражнения для закрепления.
Критерии оценки:«5» выполнены все задания теста правильно; «4» выполнены 4 задания теста правильно; «3» выполнены 3 задания теста правильно; «2» выполнено 2 задания.

Методические указания: используй алгоритм

«Уравнение касательной к графику функции y=f(x)
1. Обозначить абсциссу точки касания буквой а.
2. Вычислить f(a).
3. Найти f′(x) и вычислить f′(a).
4. Подставить найденные числа a,f(a),f′(a) в формулу :
y=f(a)+f′(a)(x−a)
Пример: Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке с абсциссой x_o=3.
Решение.
1. x_o = 3 – абсцисса точки касания.
2. f(3) = – 2.
3. f '(x) = x^2 – 4, f '(3) = 5.
4.Подставив в уравнение касательной значения x_o=3, f(x_o)=-2, f '(x_o)=5, получим y = – 2 + 5(x – 3), т.е. y = 5x – 17. Это и есть искомое уравнение касательной.
Ответ: y = 5x-17.
Упражнения

Найти уравнение касательной к графику функции f(x) в точке с абсциссой x_o. Решение вести по образцу примера, указанного выше. Выбрать правильный ответ.

	1	2	3	4
1.f(x)=-x^2-4x+2, x_o=-1.	y=-2x-3	y=2x-1	y=-x+3	y=2x+3.
2. f(x)=-x^2+6x+8, x_o=-2.	y=2x-6	y=10x+12	y=4x+8	y=-10x+8.
3. f(x)=x^3 +5x+5, x_o=-1.	y=7x+8	y=8x+7	y=9x+8;	y=8x+6.
4. f(x)=2cosx, x_o=$\frac{\pi}{2}$.	$y = \pi - x$	$y = \pi - 2x$	$y = \frac{\pi}{2} - 2x$	$y = \frac{\pi}{2} - x$
5.f(x)=1-sin2x,x_o=0	y=1-2x	y=2x	y = -2x;	y=2x+1

Форма работы: письменно в тетради

Контрольные вопросы:

1. Что такое касательная?
2. Уравнение касательной?

ТЕМА 1.4. ИНТЕГРАЛ

Самостоятельная работа по теме «Первообразная»

Цель: закрепить и систематизировать навыки, полученные на занятии; овладение практическими навыками интегрирования при решении упражнений.

Задание:1.Ответить на вопросы; 2.Выполнить задания самостоятельной работы. Работа состоит из 4 вариантов. Свободный выбор варианта.

Критерии оценки: «5»- верно выполнены все задания; «4»- верно выполнены все задания и есть недочеты; «3»- верно выполнено 1 задание; «2»- выполнено менее половины заданий.

Методические указания:

Первообразная (antiderivative)

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, если ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Пример. Поскольку

$$\left(x^3\right)' = 3x^2$$

тогда x^3 есть первообразная для функции $3x^2$

Правила вычисления первообразных

№	Правила	Примеры
1	Первообразная суммы равна сумме первообразных	$f(x)=x^2$; $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ Первообразная для $g(x)=2x$; $G(x)=x^2$ функции $f(x)+g(x)$: $\underline{\frac{1}{3}x^3+x^2}$
2	Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной	$f(x)=x^3$; $F(x)=\frac{1}{4}x^4$ $f_1(x)=3\cdot x^3$, значит, $\underline{F_1(x)=3\cdot\frac{1}{4}x^4=\frac{3}{4}x^4}$
3	Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ и k, b – постоянные, $k\neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первообразная для $f(kx+b)$	$f(x)=(2x-1)^5$. Для $h(x)=x^5$ – первообразная $H(x)=\frac{x^6}{6}$. Для функции $h(2x-1)=(2x-1)^5$ первообразной будет $\frac{1}{2}H(2x-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^6}{6}$; $F(x)=\frac{(2x-1)^6}{12}$

№	Правила вычисления интегралов	Примеры
1	$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx$	$\int_0^1 (x^2+5x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 5xdx=\frac{1}{3}x^3\Big\vert_0^1+\frac{5}{2}x^2\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}+\frac{5}{2}=2\frac{5}{6}$
2	$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$	$\int_1^2 5xdx=5\cdot\int_1^2 xdx=5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\Big\vert_1^2\right)=5\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot 1^2\right)=5\cdot 1,5=7,5$

Вопросы: (Что бы понять уровень знаний дисциплины попробуйте ответить на следующие вопросы, используя список основной и дополнительной литературы). Если есть необходимость, то законспектируйте ответы на вопросы.

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
3. Если F(x)— первообразная для f(x), то каким равенством связаны они между собой?
4. Первообразная определяется неоднозначно. Как это нужно понимать?
5. Почему при интегрировании функций появляется произвольная постоянная?
6. Почему одна функция имеет целую совокупность первообразных?
7. Как записать всю совокупность первообразных функций?
8. Что называется неопределенным интегралом?
9. Чем отличается неопределенный интеграл от первообразной функции?
10. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
11. Что такое определенный интеграл?
12. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

13. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
14. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равной отрицательному числу, нулю и почему?
15. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Вариант 1

1. Найдите первообразную для следующих функций:

А) f(x) = $\sqrt{7}$;
Б) f(x) = x^{11};
В) f(x) = $\frac{1}{x^5}$;
Г) f(x) = $x^8 + 3x^7 - 5x + 2$;
Д) f(x) = $-\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{3}x$;
Е) f(x) = $(4x-5)^2$;
Ж) f(x) = $\sin(\frac{\pi}{2} - 6x)$.

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку М:

А) f(x) = $3x^2$ - $8x^3$ +5, М(-2; 10);
Б) f(x) = - 8 $\cos\frac{x}{3}$, М($\frac{\pi}{6}$; 5).

Вариант 2

1. Найдите первообразную для следующих функций:

А) f(x) =$\frac{12}{17}$;
Б) f(x) = x^{95};
В) f(x) = $\frac{1}{x^6}$;
Г) f(x) = $x^5 + 8x^3 - \sqrt{5}$;
Д) f(x) = $4 + \sin 2x$;
Е) f(x) = $(2-7x)^4$;
Ж) f(x) = $\frac{3}{\sin^2(4x-\frac{\pi}{3})}$.

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку М:

А) f(x) = $4x^3$ + 10x -9, М(3; 15);
Б) f(x) = $\frac{6}{\cos^2 x}$, М($\frac{\pi}{3}$; -2).

Вариант 3

1.Найдите первообразную для следующих функций:

А) f(x) = - 0,45;
Б) f(x) = x^{10};
В) f(x) = $\frac{1}{x^7}$;
Г) f(x) = $2x^6 + 3x^5 - 2x$;
Д) f(x) = $\frac{3}{\sin^2 x} - \sqrt{7}$;
Е) f(x) = $(5x-6)^3$;
Ж) f(x) = $\cos(\frac{\pi}{6} - 5x)$.

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку М:

А) f(x) = - $9x^2 - x$ + 4, М(-4; -20);
Б) f(x) = 4 $\sin 3x$, М($\frac{\pi}{3}$; 7).

Вариант 4

1.Найдите первообразную для следующих функций:

А) f(x) = 132;
Б) f(x) = x^{11};
В) f(x) = $\frac{1}{x^8}$;
Г) f(x) = $-2x + 6x^9 - 0{,}5$;
Д) f(x) = $\frac{2}{5}$ + $\cos x$;
Е) f(x) = $(\sqrt{2} - 6x)^5$;
Ж) f(x) = $\frac{1}{\cos^2(3x+\pi)}$.

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку М:

А) f(x) = 7 - $6x^2$ + $12x^3$, М(2; -25);
Б) f(x) =$\frac{1}{\sin^2 x}$, М($\frac{3\pi}{4}$; -5).

Форма работы: письменно в тетради.

Самостоятельная работа по теме
«Неопределенный интеграл»

Цель: углубленное изучение темы; решение сложных заданий; формирование умений использовать специальную и дополнительную литературу;

Задание: 1. Разобрать примеры, обратить внимание на оформление задания. 2.Вычислить неопределенные интегралы (10 заданий), 24 варианта. Вариант выбрать, согласно списка в групповом журнале.

Критерии оценки: «5» верно выполнены все задания; «4» верно выполнены 8-9 заданий; «3» верно выполнено 6 заданий; «2» выполнено менее половины заданий.

Методические указания: В теме «Неопределенный интеграл» рассматривается задача, обратная задаче о дифференцировании функций.
Задача состоит в следующем: дана функция $f(x)$, являющаяся производной некоторой функции $F(x)$; требуется найти функцию $F(x)$.
К такой математической задаче приводят многие физические, химические и другие задачи, например, задача об отыскании закона равномерного движения материальной точки вдоль прямой по заданной скорости, задача о нахождении закона химической реакции по известной её скорости.
Особое значение эта тема имеет при решении дифференциальных уравнений, описывающих различные физические и механические процессы.
Для успешного усвоения навыков интегрирования надо, прежде всего, выучить наизусть таблицу интегралов и свойства интегралов.

Таблица простейших интегралов

1. $\int 0 \cdot du = C;$

2. $\int 1 \cdot du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$

4. $\int \dfrac{1}{u^2} du = -\dfrac{1}{u} + C;$

5. $\int \dfrac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C;$

6. $\int \dfrac{1}{u} du = \ln|u| + C;$

7. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

8. $\int e^u du = e^u + C;$

9. $\int \sin u du = -\cos u + C;$

10. $\int \cos u du = \sin u + C;$

11. $\int \dfrac{1}{\cos^2 u} du = \mathrm{tg} u + C;$

12. $\int \dfrac{1}{\sin^2 u} du = -\mathrm{ctg} u + C;$

Правила интегрирования

1. $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$

2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+m)dx = \dfrac{F(kx+m)}{k} + C$

Пусть известно, что $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Тогда $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$

Это правило упрощает вычисление многих неопределенных интегралов.
Например:

$$\int (x+2)^3 dx = \frac{(x+2)^4}{4} + C \qquad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int (7x+2)^3 dx = \frac{1}{7}\frac{(7x+2)^4}{4} + C \qquad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int e^{-3x+1} dx = \frac{1}{-3}e^{-3x+1} + C \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

2.Вычислить неопределенный интеграл.

Вариант 1 1. $\int 7dx$ 2. $\int x^8 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4\cos x\,dx$ 7. $\int (7x-8)^4 dx$ 8. $\int (7x^2 - 3x^3 + 4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x - \frac{\pi}{4})\,dx$ 10. $\int (8\cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2})dx$	Вариант 2 1. $\int 5dx$ 2. $\int x^6 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \cos x\,dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6\sin x\,dx$ 7. $\int (3x+9)^6 dx$ 8. $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x - \frac{\pi}{2})\,dx$ 10. $\int (6\sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9})dx$	Вариант 3 1. $\int 3dx$ 2. $\int x^3 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9\cos x\,dx$ 7. $\int (4x-3)^5 dx$ 8. $\int (4x^4 + 6x^2 - 8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x - \frac{\pi}{3})\,dx$ 10. $\int (3\cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1})dx$
Вариант 4 1. $\int 2dx$ 2. $\int x^5 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 6e^x dx$ 6. $\int 4\cos x\,dx$ 7. $\int (6x-10)^8 dx$ 8. $\int (6x^3 + 8x^7 - 3x^8)dx$ 9. $\int \sin(9x - \frac{\pi}{5})\,dx$ 10. $\int (8\cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2})dx$	Вариант 5 1. $\int 4dx$ 2. $\int x^9 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \cos x\,dx$ 5. $\int 3e^x dx$ 6. $\int 6\sin x\,dx$ 7. $\int (5x+11)^7 dx$ 8. $\int (12x^7 + 6x^5 + 4x^6)dx$ 9. $\int \cos(8x - \frac{\pi}{3})\,dx$ 10. $\int (6\sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9})dx$	Вариант 6 1. $\int 6dx$ 2. $\int x^7 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 9e^x dx$ 6. $\int 9\cos x\,dx$ 7. $\int (7x-2)^3 dx$ 8. $\int (4x^3 + 3x^9 - 5x^2)dx$ 9. $\int \sin(3x - \frac{\pi}{4})\,dx$ 10. $\int (3\cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1})dx$
Вариант 7 1. $\int 8dx$ 2. $\int x^8 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4\cos x\,dx$ 7. $\int (7x-8)^4 dx$ 8. $\int (7x^2 - 3x^3 + 4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x - \frac{\pi}{4})\,dx$ 10. $\int (8\cos 4x - 2\sqrt{x} + e^{5x+2})dx$	Вариант 8 1. $\int 9dx$ 2. $\int x^6 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \cos x\,dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6\sin x\,dx$ 7. $\int (3x+9)^6 dx$ 8. $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x - \frac{\pi}{2})\,dx$ 10. $\int (6\sin 2x - 6\sqrt{x} + e^{7x-9})dx$	Вариант 9 1. $\int 10dx$ 2. $\int x^3 dx$ 3. $\int \frac{1}{x} dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9\cos x\,dx$ 7. $\int (4x-3)^5 dx$ 8. $\int (4x^4 + 6x^2 - 8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x - \frac{\pi}{3})\,dx$ 10. $\int (3\cos 5x - 7\sqrt{x} + e^{8x+1})dx$

Вариант 10 1. $\int 7dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4\cos x\,dx$ 7. $\int (6x-10)^8dx$ 8. $\int (7x^2-3x^3+4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x-\frac{\pi}{4})\,dx$ 10. $\int (8\cos 4x-2\sqrt{x}+e^{5x+2})dx$	Вариант 11 1. $\int 5dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x\,dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6\sin x\,dx$ 7. $\int (5x+11)^7dx$ 8. $\int (5x^3-4x^2+7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x-\frac{\pi}{2})\,dx$ 10. $\int (6\sin 2x-6\sqrt{x}+e^{7x-9})dx$	Вариант 12 1. $\int 3dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9\cos x\,dx$ 7. $\int (7x-2)^3dx$ 8. $\int (4x^4+6x^2-8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x-\frac{\pi}{3})\,dx$ 10. $\int (3\cos 5x-7\sqrt{x}+e^{8x+1})dx$
Вариант 13 1. $\int 2dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4\cos x\,dx$ 7. $\int (7x-8)^4dx$ 8. $\int (7x^2-3x^3+4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x-\frac{\pi}{4})\,dx$ 10. $\int (8\cos 4x-2\sqrt{x}+e^{5x+2})dx$	Вариант 14 1. $\int 4dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x\,dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6\sin x\,dx$ 7. $\int (3x+9)^6dx$ 8. $\int (5x^3-4x^2+7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x-\frac{\pi}{2})\,dx$ 10. $\int (6\sin 2x-6\sqrt{x}+e^{7x-9})dx$	Вариант 15 1. $\int 6dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9\cos x\,dx$ 7. $\int (4x-3)^5dx$ 8. $\int (4x^4+6x^2-8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x-\frac{\pi}{3})\,dx$ 10. $\int (3\cos 5x-7\sqrt{x}+e^{8x+1})dx$
Вариант 16 1. $\int 8dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4\cos x\,dx$ 7. $\int (7x-8)^4dx$ 8. $\int (7x^2-3x^3+4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x-\frac{\pi}{4})\,dx$ 10. $\int (8\cos 4x-2\sqrt{x}+e^{5x+2})dx$	Вариант 17 1. $\int 9dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x\,dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6\sin x\,dx$ 7. $\int (3x+9)^6dx$ 8. $\int (5x^3-4x^2+7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x-\frac{\pi}{2})\,dx$ 10. $\int (6\sin 2x-6\sqrt{x}+e^{7x-9})dx$	Вариант 18 1. $\int 10dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9\cos x\,dx$ 7. $\int (4x-3)^5dx$ 8. $\int (4x^4+6x^2-8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x-\frac{\pi}{3})\,dx$ 10. $\int (3\cos 5x-7\sqrt{x}+e^{8x+1})dx$
Вариант 19 1. $\int 11dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4\cos x\,dx$ 7. $\int (7x-8)^4dx$ 8. $\int (7x^2-3x^3+4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x-\frac{\pi}{4})\,dx$ 10. $\int (8\cos 4x-2\sqrt{x}+e^{5x+2})dx$	Вариант 20 1. $\int 12dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x\,dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6\sin x\,dx$ 7. $\int (3x+9)^6dx$ 8. $\int (5x^3-4x^2+7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x-\frac{\pi}{2})\,dx$ 10. $\int (6\sin 2x-6\sqrt{x}+e^{7x-9})dx$	Вариант 21 1. $\int 13dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9\cos x\,dx$ 7. $\int (4x-3)^5dx$ 8. $\int (4x^4+6x^2-8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x-\frac{\pi}{3})\,dx$ 10. $\int (3\cos 5x-7\sqrt{x}+e^{8x+1})dx$
Вариант 22 1. $\int 17dx$ 2. $\int x^8dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 8e^x dx$ 6. $\int 4\cos x\,dx$ 7. $\int (7x-8)^4dx$ 8. $\int (7x^2-3x^3+4x^5)dx$ 9. $\int \sin(7x-\frac{\pi}{4})\,dx$ 10. $\int (8\cos 4x-2\sqrt{x}+e^{5x+2})dx$	Вариант 23 1. $\int 15dx$ 2. $\int x^6dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \cos x\,dx$ 5. $\int 4e^x dx$ 6. $\int 6\sin x\,dx$ 7. $\int (3x+9)^6dx$ 8. $\int (5x^3-4x^2+7x^4)dx$ 9. $\int \cos(5x-\frac{\pi}{2})\,dx$ 10. $\int (6\sin 2x-6\sqrt{x}+e^{7x-9})dx$	Вариант 24 1. $\int 13dx$ 2. $\int x^3dx$ 3. $\int \frac{1}{x}dx$ 4. $\int \sin x\,dx$ 5. $\int 5e^x dx$ 6. $\int 9\cos x\,dx$ 7. $\int (4x-3)^5dx$ 8. $\int (4x^4+6x^2-8x^7)dx$ 9. $\int \sin(6x-\frac{\pi}{3})\,dx$ 10. $\int (3\cos 5x-7\sqrt{x}+e^{8x+1})dx$

Форма работы: письменно в тетради.

Контрольные вопросы: описать свойства неопределенного интеграла.

Самостоятельная работа по теме
«Основные свойства неопределенного интеграла»

Цель: углубить и расширить теоретические знания по теме «Основные свойства неопределенного интеграла»;
Задание: Вычислить неопределенные интегралы , результат проверить дифференцированием.
Критерии оценки: «5»- верно выполнены все задания; «4»- верно выполнены 8-9 заданий;
«3»- верно выполнено 6 заданий; «2»- выполнено менее половины заданий.
Методические указания: используй таблицу интегралов и свойства интегралов.

Таблица простейших интегралов

1. $\int 0 \cdot du = C;$
2. $\int 1 \cdot du = u + C;$
3. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$
4. $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C;$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C;$
6. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C;$
7. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
8. $\int e^u du = e^u + C;$
9. $\int \sin u du = -\cos u + C;$
10. $\int \cos u du = \sin u + C;$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \mathrm{tg} u + C;$
12. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\mathrm{ctg} u + C;$

Основыные свойства неопределенного интеграла

Везде далее предлагается, что все рассматриваемые неопределенные интегралы существуют.

1. $\int dF(x) = F(x) + C.$
2. $d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$
3. $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$, где $\alpha \neq 0$,

т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.*

4. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$

т. е. *неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций.*

5. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ где } a \neq 0.$$

Вычислить неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием:

$1. \int 5x^2 - 4x^2 + 2x - 1)dx$; 2. $\int (\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3\sqrt{x}} + 3)dx.$

3. $\int \frac{2x^3 - 3x + 7}{x} dx$; 4. $\int (4x^3 - \frac{5}{\cos^2 x} + 3^x)dx.$

5. $(x^5 - \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x-4})\,dx.$ 6. $\int (a\sin x - b\cos x + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx.$

7. $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4})dx.$ 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 9. $\int \frac{dx}{5+x^2}$

10. $\int (\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x\sqrt{x}} + 5)dx.$ 11. $\int \frac{dx}{5-x^2}$ 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$

Форма работы: письменно в тетради

Контрольные вопросы:

1. Что такое интегрирование?
2. Что такое первообразная?

Самостоятельная работа по теме
«Определенный интеграл».

Цель: углубить и расширить теоретические знания по теме «Определенный интеграл». Продолжить формировать умения по решению интегралов;
Задание:1.Вычислить определенный интеграл.
Критерии оценки: «5»- верно выполнены все 9 заданий; «4»- верно выполнены 7-8 заданий; «3»- верно выполнено 5-6 заданий; «2»- выполнено менее 5 заданий.
Методические указания: используй таблицу интегралов и свойства интегралов

Свойства определённого интеграла.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ 2. $\int_a^a f(x)=0$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, k-любое число
4. $\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx$
5. Аддитивность определённого интеграла. Для любых чисел a,b,c справедливо:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Таблица простейших интегралов

1. $\int 0\cdot du = C;$ 2. $\int 1\cdot du = u + C;$
3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$ 4. $\int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C;$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = 2\sqrt{u} + C;$ 6. $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C;$
7. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$ 8. $\int e^u du = e^u + C;$
9. $\int \sin u du = -\cos u + C;$ 10. $\int \cos u du = \sin u + C;$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \mathrm{tg} u + C;$ 12. $\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\mathrm{ctg} u + C;$

Пример1. Вычислим $\int_{-1}^{2} x^2 dx$. Поскольку для x^2 одной из первообразных является $\frac{x^3}{3}$, то $\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$

Для удобства записи разность $F(b)-F(a)$(приращение функции Fна отрезке $[a;b]$) принято сокращенно обозначать $F(x)\big|_a^b$, т.е. $F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$. Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона – Лейбница обычно записывают в виде $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b$. Пример 2. Вычислим $\int_o^\pi \sin x dx$. Пользуясь введенными обозначениями, получим: $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos) = 2.$

Вычислить определенный интеграл:

$\int_0^4 4Sinx\ dx;$	$\int_6^{12} 4x^3\ dx;$	$\int_9^{33} 7dx$
$\int_5^6 (x^2 - 6x)dx,$	$\int_{-3}^5 (2x^6 + 4x)\ dx$	$\int_0^1 43sinxdx,$
$\int_6^{12} (4x^{43} - 1)dx,$	$\int_9^{33} (7x + 6)dx,$	$\int_{-3}^5 (6x^6 + x)\ dx$

Форма работы: письменно в тетради
Контрольные вопросы:

1.Что такое определенный интеграл?
2.Перечислить свойства интегралов.

Самостоятельная работа по теме
«Интегральное исчисление».

Цель: изучить применение определенного интеграла, используя специальную и дополнительную литературу;
Задание: Подготовить реферат на тему: «Формула Ньютона - Лейбница», «История интегралов», «Методы интегрирования».

Критерии оценки: «5» - реферат выполнен с учетом методических рекомендаций, тема полностью раскрыта, соблюдается логичность, последовательность изложения материала, качественное внешнее оформление, объем - 4 листа формата А-4; «4» - реферат выполнен с учетом методических рекомендаций, тема полностью раскрыта, но есть небольшие недочеты в работе, объем – 3листа; «3» - при выполнении реферата наблюдается отклонение от методических рекомендаций, тема раскрыта не полностью, нарушена логичность, отсутствует внутренняя логика изложения, удовлетворительное внешнее оформление, объем менее 2 листов; «2» - при выполнении анализа статьи наблюдается отклонение от методических рекомендаций, тема не раскрыта, неудовлетворительное внешнее оформление, объем менее 2 листов.

Методические указания:
План написания реферата:
1. Введение.
2. Основная часть состоит из глав:
   - ✓ Понятие интеграла;
   - ✓ Криволинейная трапеция;
   - ✓ Понятие площади;
   - ✓ Образцы решений.
3. Заключение.
4. Список литературы.

Список рекомендуемой литературы:

1. Атанасян Л.С. «Геометрия»: Учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 1999. – 207 с.: ил.
2. Богомолов В.Н. Математика [Текст]: учебник для ссузов/Н.В. Богомолов, П.И. Самолйленко. – 3-е издание, стереотипное. – Москва: Дрофа, 2005. – 395 [5] с. : ил.
3. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. «Математика для техникумов» на базе средней школы: Учеб. Пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990 – 576 с.: ил.
4. Мордкович А.Г., Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях. Ч.1: Учеб.для общеобразовательных учреждений. – 7-е изд. – М.: Мнемозина, 2006. – 375 с.: ил.
5. Пехлецкий И.Д. Математика. – М.: Мастерство, 2001-304 с

Интернет ресурсы:

1.http://window.edu.ru/resource/662/75662 Элементы теории числовых и функциональных рядов: Методическое пособие Автор/создатель: Нахман А.Д. Год: 2009
2.http://window.edu.ru/resource/797/56797 Основные законы и формулы по математике и физике: Справочник. Автор/создатель: Булгаков Н.А., Осипова И.А. Год: 2007

Форма работы: реферат выполнить на бумаге формата А-4, распечатать на принтере.

Самостоятельная работа по теме

« Интеграл и его приложения»

Цель: Вычисление определенного интеграла, нахождение площади фигур ограниченных функциями; работа со справочным материалом. Контроль знаний.
Задания: 1. ответить на вопросы; 2.выполнить задания домашней контрольной работы. Преподаватель определяет вариант каждому студенту.
Методические указания: смотри по теме «Неопределенный и определенный интеграл»

Критерии оценки: «5»- верно выполнены все задания домашней контрольной работы; «4»- верно выполнены все задания, но есть недочеты(построены графики не аккуратно и неточно); «3»- верно выполнено 2-3 задания; «2» выполнено менее 2 заданий.

Вопросы:
1.Что называется неопределенным интегралом?

2. Чем отличается неопределенный интеграл от первообразной функции?

3. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

4. Что такое определенный интеграл?

5. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

6. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

7. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равной отрицательному числу, нулю и почему?

8. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Домашняя контрольная работа по теме «Интеграл и его приложения»

Вариант- 1.
1.Указать первообразную для функции $f_{(x)} = x + \cos x$
2.Известно, что $\int_a^b f_{(x)}\,dx = 2$. Найдите: $2\int_a^b f_{(x)}\,dx + \int_b^a f_{(x)}\,dx$
3. Вычислить интегралы:
а) $\int_0^1 (\mathrm{x}^3 - 4\mathrm{x})\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\,dx}{cos^2 x}$; в) $\int_1^2 \frac{4\mathrm{x}^5 - 3\mathrm{x}^4 + \mathrm{x}^3 - 1}{\mathrm{x}^2}\,dx$
4.Скорость точки движущейся прямолинейно, задана уравнением
$v_{(t)} = (3t^2 + 1)\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}$. Вычислить ее путь за 5 сек от начала движения.
5.Вычислить (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$.

Вариант- 2.
1.Указать первообразную для функции $f_{(x)} = 3\mathrm{x}^2 - \sin \mathrm{x}$
2.Известно, что $\int_a^b f_{(x)}\,dx = 2$. Найдите: $\int_b^b f_{(x)}\,dx - 3\int_b^a f_{(x)}\,dx$
3. Вычислить интегралы:
а) $\int_{-1}^1 (\mathrm{x}^5 + 2\mathrm{x})\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\sin \mathrm{x}\,dx$; в) $\int_2^3 \frac{6\mathrm{x}^4 - 4\mathrm{x}^3 + 7\mathrm{x}^2 - 1}{\mathrm{x}^2}\,dx$
4.Скорость точки движущейся прямолинейно, задана уравнением
$v_{(t)} = (2t^3 + 3)\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}$. Вычислить ее путь за 2 сек от начала движения. x
5.Вычислить (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = 4- x^2$, $y=0$

Вариант- 3.

1.Указать первообразную для функции $f_{(x)} = 3 - \cos x$

2.Известно, что $\int_a^b f_{(x)}\,dx = 2$. Найдите: $\int_b^a f_{(x)}\,dx + 4\int_a^b f_{(x)}\,dx$

3. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^2 (3x^2 + 1)\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dx}{sin^2 x}$; в) $\int_{-2}^{-1} \frac{5x^7 - 4x^6 + 2x}{x^3}\,dx$

4.Скорость точки движущейся прямолинейно, задана уравнением

$v_{(t)} = (t^2 - 5t)$ м/с . Вычислить ее путь за 3 сек от начала движения.

5.Вычислить (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2+2$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

Вариант - 4.

1.Указать первообразную для функции $f_{(x)} = 4x^3 + 5x$

2.Известно, что $\int_a^b f_{(x)}\,dx = 2$. Найдите: $5\int_a^b f_{(x)}\,dx - \int_a^a f_{(x)}\,dx$

3. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^1 (8x - 3x^2)\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x\,dx$; в) $\int_{-2}^{-1} \frac{3x^6 - 4x^5 + 7x^4 + 3x^2}{x^4}\,dx$

4.Скорость точки движущейся прямолинейно, задана уравнением

$v_{(t)} = (4t^3 + 1)$ м/с . Вычислить ее путь за 1 сек от начала движения.

5.Вычислить (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 1- x^2$, $y=0$

Форма работы: письменно в тетради;

Самостоятельная работа по теме
«Вычисление интегралов. Нахождение площади криволинейной трапеции»

Цель: повторение изученного материала, предоставить возможность использовать приобретенные знания при решении задач разного содержания и уровня сложности.
Задание: выполнить упражнения. Всего 6 вариантов. Преподаватель указывает вариант.
Критерии оценки: оценка «5» -верно выполнены 3задания; «4»- верно выполнены 2задания; «3»- верно выполнено 1 задание.
Методические указания:

Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными функциями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке [*a*, *b*], находится по формуле:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, \mathrm{d}\, x.$$

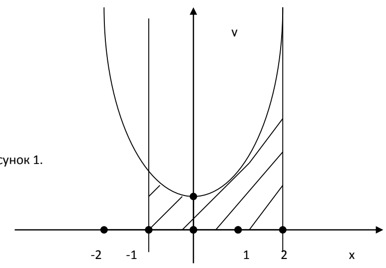
Вычисление площадей с помощью определенного интеграла осуществляется в следующим порядке:

1) делается рисунок фигуры, площадь которой необходимо найти;
2) находятся пределы интегрирования;
3) подбирается нужная формула;
4) вычисляется значение площади

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, прямыми $x = -1, x = 2$ и осью абсцисс.

Решение. Построим криволинейную трапецию

Рисунок 1.



Пределы интегрирования: $a = -1,\ b = 2.$

Площадь вычисляем по формуле $S = \int_a^b (x^2 + 1)\mathrm{d}\, x.$

Получаем

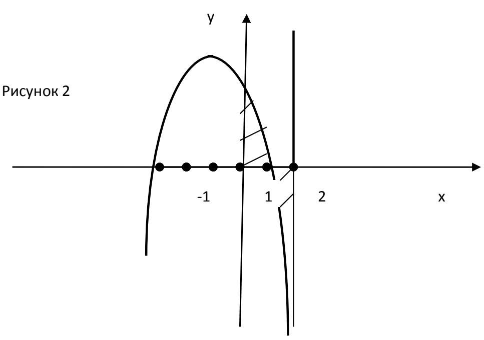
$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\, \mathrm{d}\, x = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 6 \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 - 2x + 3$, осями координат и прямой $x = 2$.

Решение. На рисунке 2. изображена фигура, площадь которой надо найти.

Функция $y = -x^2 - 2x + 3$ на отрезке [0, 2] меняет знак. Следовательно, промежуток интегрирования [0, 2] необходимо разбить на два промежутка: $[0,1]$ и $[0,2]$. Получим:

Рисунок 2



$$S = \int_0^1 \left(-x^2 - 2x + 3\right) \mathrm{d}\, x - \int_1^2 \left(-x^2 - 2x + 3\right) \mathrm{d}\, x = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Bigg|_0^1 -$$

$$-\left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^2 = \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 6\right) + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = 4$$

(кв. ед).

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 4x$ и прямой $x - y + 4 = 0$.

Решение. Сделаем рисунок плоской фигуры, заключенной между параболой и прямой

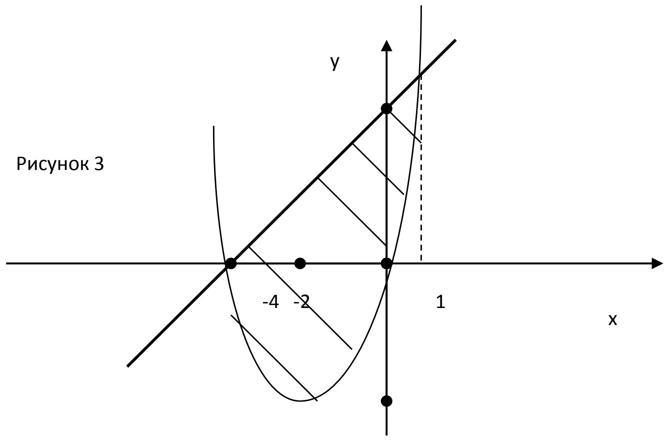


Рисунок 3

(рисунок 3).

Найдем пределы интегрирования, для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$ и

получим $\{(-4;0);(1,5)\}$.

Следовательно, пределы интегрирования: $a = -4, b = 1$.

Вычислим площадь:

$$S = \int_{-4}^{1} \left[x + 4 - \left(x^2 + 4x\right)\right] \mathrm{d}\,x = \int_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right) \mathrm{d}\,x = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.).}$$

Вариант 1

1.Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int \left(4x^3 - 6x^2 - 4x + 3\right) dx$$

$$\int \frac{x^4 - xe^x + 6}{x} dx$$

2.Вычислите определенные интегралы:

$$\int_{-1}^{0} \left(x^3 + 2x\right) dx$$

$$\int_{4}^{5} (4 - x)^3 dx$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -3x^2, y = 0, x = 1$ и $x = 2$.

Вариант 2

1.Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int \left(x^{-4} - x^{-3} - 3x^{-2} + 1\right) dx$$

$$\int x^4 (x - 1) dx$$

2.Вычислите определенные интегралы:

$$\int_{-2}^{3} \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1\right) dx$$

$$\int_{-1}^{2} \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5\right) dx$$

3.Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$ и $y = 0$.

Вариант 3

1.Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int \left(5x^{3/2} - 7x^{3/4}\right)dx$$

$$\int \frac{x^2 * 2^x + 3x^3 + 7x}{x^2}dx$$

2.Вычислите определенные интегралы:

$$\int_{-1}^{3}\left(4x^3 - 6x^2 - 4x + 3\right)dx$$

$$\int_{1}^{8}\left(x^3 - \sqrt[3]{x^2}\right)dx$$

3.Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3,\ y = 0,\ x = -2\ u\ x = 2.$

Вариант 4

1.Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int \left(3x^{-4} + 8x^{-5} - 5^x\right)dx$$

$$\int 3\left(2x^2 - 1\right)^2 dx$$

2.Вычислите определенные интегралы:

$$\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$\int_{-1}^{2}\left(x^2 + 2x + 1\right)dx$$

3.Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 1,\ y = 0,\ x = -2\ u\ x = 1.$

Вариант 5

1.Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5\right)dx$$

$$\int x^3(1 + 5x)dx$$

2.Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x^2}dx$ б) $\int_{0}^{3}(3 + 2x)^3 dx$

3.Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 - x,\ y = 0,\ x = -1\ u\ x = 1.$

Вариант 6

1.Вычислите неопределенные интегралы:

$$\int \left(3^x - e^x + 2x - 1\right)dx$$

$$\int (5x + 3)^3 dx$$

2.Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_{8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int_{-2}^{2}\left(x^3 + 2x + 5\right)dx$

3.Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x^3,\ y = 0,\ x = -1\ u\ x = 2.$

Форма работы: письменно в тетради

Контрольные вопросы:

1.Какую фигуру называют криволинейной трапецией? Какая формула позволяет вычислять площадь криволинейной трапеции?

2. Именами каких ученых названа формула определенного интеграла? Как записать интегральную запись формулы Ньютона –Лейбница?

Самостоятельная работа по теме
« Интеграл и его приложения. Вычисление объема тел вращения»»

Цель: углубить и расширить теоретические и практические знания по теме «Вычисление объема тел вращения»

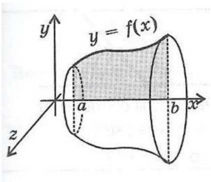
Задание: 1.Решить задачи по теме, выбрав любые две.

Критерии оценки: «5» - верно выполнены 6заданий; «4»- верно выполнены 4-5заданий; «3» - верно выполнены 2-3задания.

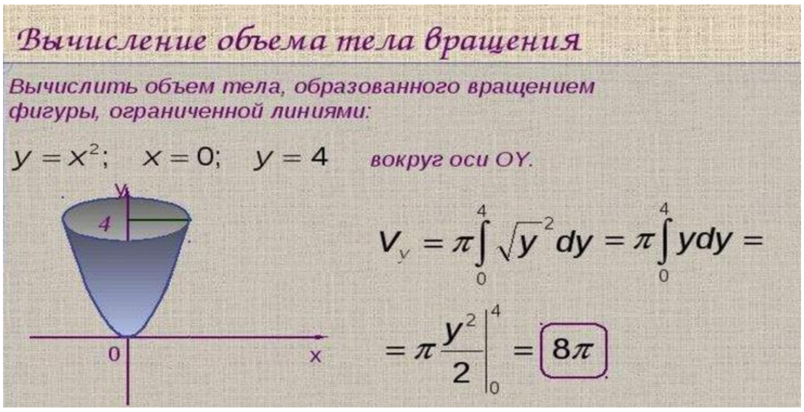
Методические указания:

Объем тела,

- полученного в результате вращения вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции y=f(x) на отрезке [a;b]:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$



Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, находится по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, осью ординат и двумя прямыми $y = c$ и $y = d$, находится по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 \, dy.$$

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью вращения параболы $y^2 = x$ вокруг оси Ox и плоскостью $x = 2$.

Решение. Найдем V_x согласно приведенной выше формуле:

$$V_x = \pi \int_0^2 y^2 \, \mathrm{d}\, x = \pi \int_0^2 x \, \mathrm{d}\, x = \pi \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = 2\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$ и отрезком $0 \le y \le 8$ оси ординат.

Решение. Записав уравнение данной кривой в виде $x = \sqrt[3]{y}$ и используя формулу вычисления объема, получим

$$V_y = \pi \int_0^8 \sqrt[3]{y^2} \, \mathrm{d}\, y = \frac{3}{5} \pi \sqrt[3]{y^5} \Big|_0^8 = \frac{96}{5} = 19\frac{1}{5} \text{ (куб. ед.).}$$

Задачи:

1.Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox трапеции, образованной прямыми $y = \frac{x}{2}, x = 4, x = 6$ и осью Ox.

2.Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Oy трапеции, образованной прямыми $y = 3x, y = 2, y = 4$ и осью ординат.

3.Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $[0, \pi]$ оси абсцисс.

4.Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной дугой кубической параболы $y = x^3 - 4x$ и осью абсцисс.

5.Найти объем тела, образованного вращением эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ вокруг его малой оси.

6.Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = 2x^2$ и $y = x^3$.

Форма работы: письменно в тетради.

Контрольные вопросы:

1.Что такое объем?

2.Как вычислить объем тела вращения?

РАЗДЕЛ 2.ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

ТЕМА2.1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Самостоятельная работа по теме «Матрицы».

Цель: углубить и расширить практические и теоретические знания по теме «Матрицы»

Задание: 1. Выучить определения по теме «Матрицы»; **2.**Решить задания.

Критерии оценки: «5»- верно выполнены все 4 задания; «4»- верно выполнены 3 задания; «3»- верно выполнено 2 задания; «2»- верно выполнено менее 2 заданий.

Методические указания:

Линейные операции над матрицами.

Линейные операции – это сложение, вычитание, умножение на число.

•Сложение и вычитание матриц.

Складывать и вычитать можно только матрицы одинакового размера.

Чтобы сложить (или вычесть) две матрицы надо сложить (вычесть) попарно их соответствующие элементы.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}\pm\mathrm{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & \ldots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}\pm b_{k1} & \ldots & a_{kn}\pm b_{kn} \end{pmatrix}$$

Произведение матриц

Определение. *Произведением матрицы* **A** *размера* $(m\times n)$ *на матрицу* **B** *размера* $(n\times k)$ *называется матрица* **C=AB** *размера* $(m\times k)$, *элемент которой, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен скалярному произведению i–й строки матрицы* **A** *на j-й столбец матрицы* **B**

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}.$$

Пример. Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2\cdot5+1\cdot2+0\cdot3 & 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot4 & 2\cdot7+1\cdot1+0\cdot2 & 2\cdot0+1\cdot3+0\cdot2 \\ 3\cdot5+0\cdot2+5\cdot3 & 3\cdot1+0\cdot0+5\cdot4 & 3\cdot7+0\cdot1+5\cdot2 & 3\cdot0+0\cdot3+5\cdot2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 12 & 2 & 15 & 3 \\ 30 & 23 & 31 & 10 \end{pmatrix}$$

Из каждого номера можно выбрать одно задание и решить его:

№1. Сложить матрицы А и В:

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

№2. Вычислить линейные комбинации матриц:

1. 2А – В, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. 3А + 2В, если $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$,

№3. Найти произведения матриц:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

№4. Найти произведение АВ:

1. $A=\begin{pmatrix} 3\ 2\ 1 \\ 0\ 1\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1\ 2 \\ 2\ 0 \\ -3\ 1 \end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix} 3\ 0 \\ 0-1 \\ -2\ 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1\ 0\ 2 \\ 2\ 1\ 0 \end{pmatrix}$

Форма работы: письменно в тетради.

Контрольные вопросы: 1. Перечислить операции над матрицами.

Самостоятельная работа по теме «Операции с матрицами».

Цель: углубить и расширить практические и теоретические знания по теме «Матрицы»

Задание: выполни соответствующие операции над матрицами.

Критерии оценки: «5»- верно выполнены все задания; «4»- верно выполнены 4 задания 4; «3»- верно выполнено 3 задания; «2»- верно выполнено менее 2 заданий.

Методические указания:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$

A- матрица, a_{mn} - элемент матрицы, m- номер строки, n- номер столбца, в которой расположен данный элемент. Числа m,n называют **размерностями** матрицы.

Матрица называется **квадратной**, если m=n. Число n называют порядком квадратной матрицы.

Матрицы одинаковой размерности называются **равными**, если у них соответственно равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны нулю.

Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы, стоящие на ее главной диагонали, равны 1, а остальные равны нулю.

Суммой (разностью) матриц A и B одинаковой размерности m×n называется матрица C той же размерности, каждый элемент которой равен сумме (разности) элементов матрицы A и B, стоящих на тех же местах.

Пример: A= $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$. Найти A+B, A-B.

Решение: A+B= $\begin{pmatrix} 1+8 & 5+1 \\ 4-9 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

A-B= $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 13 & -2 \end{pmatrix}$

Произведением матрицы на число называется матрица той же размерности что и искомая, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженными на данное число.

Пример: A= $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти 5*A

Решение 5A= $\begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -10 & 35 \end{pmatrix}$

Произведением матрицы $\begin{matrix} a \\ (¿¿ij) \\ A=¿ \end{matrix}$, имеющей m строк и k столбцов, на матрицу $\begin{matrix} b \\ (¿¿ij) \\ B=¿ \end{matrix}$, имеющую k строк и n столбцов, называется матрица $\begin{matrix} c \\ (¿¿ij) \\ C=¿ \end{matrix}$, имеющая k строк и n столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0*1+1*0+0*1 & 0*0+1*1+0*0 & 0*1+1*0+0*1 \\ 1*1+0*0+1*1 & 1*0+0*1+1*0 & 1*1+0*0+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

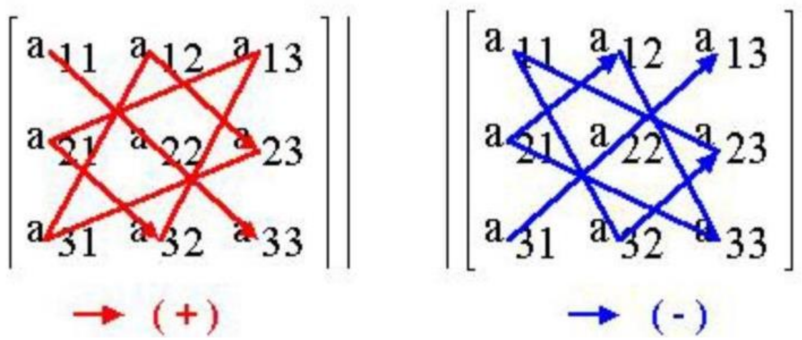
Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число, называемое определителем, следующим образом:

1. n=1, A= (a_1); $\Delta A = a_1$

2. n=2, A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. n=3,A=

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или правилом Саррюса), которое символически можно записать так:



Задания:

№1.Вычислить C = A^2+2B, где

$A = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7\ 4 \\ 5-3 \end{pmatrix}$

№2.Найти AB-BA, где

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1\ 21 \\ 2\ 1\ 2 \\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4\ 11 \\ 4\ 2\ 0 \\ 1\ 2\ 1 \end{pmatrix}$

№3.Найти 3A∗2B, если

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2-1\ 0 \\ 3\ 2\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1\ 2 \\ 2\ 0 \\ -3\ 1 \end{pmatrix}$

№4.Найти AE, если

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2\ 3\ 4 \\ 5-1\ 6 \end{pmatrix}, \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}$

№5.Найти EA, если

$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2\ 1 \\ -1\ 4 \\ 5-2 \end{pmatrix}$

Форма работы: письменно в тетради.

Контрольные вопросы:

1. Какая матрица называется квадратной?
2. Какая матрица называется нулевой?

Самостоятельная работа по теме «Вычисление определителей».

Цель: углубить и расширить практические и теоретические знания по теме «Матрицы и определители»

Задание: вычислить определители разных порядков.

Критерии оценки: «5»- верно выполнены 3 задания; «4»- верно выполнены 2 задания ;
«3»- верно выполнено 1 задание; «2» верно выполнено менее 1 задания.

Методические указания: примеры вычисления определителей

Примеры вычисления определителя 2-го порядка

1) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-5) - 6\cdot 2 = 3$

2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin^2\alpha) = 1$

Вычисление определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Чтобы вычислить определитель матрицы, нужно воспользоваться следующей формулой, в ней рассмотрен пример разложения матрицы по первой строке;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Основные свойства определителей:

- Рассмотрим некоторые наиболее важные свойства определителей.
- ***Свойство 1.*** При перестановке местами двух параллельных строк или столбцов определителя его знак меняется на обратный.
- ***Свойство 2.*** Определитель, содержащий две одинаковые строки или столбца, равен нулю.
- ***Свойство 3***. Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному определителю, умноженному на это число.
- ***Свойство 4.*** При транспонировании матрицы её определитель не меняет своего значения.

Из каждого номера можно выбрать одно любое задание и решить его:

№1. **Вычислить определители**:

1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$;

№2. Вычислить определители третьего порядка:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

№3. Вычислить определители четвертого порядка:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

Форма работы: письменно в тетради.

Контрольные вопросы:

1. В каком случае определитель равен нулю?

2. Какая матрица называется транспонированной?

ТЕМА 2.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Самостоятельная работа по теме «Линейная алгебра».

Цель: закрепление знаний изученного материала, использование приобретенных знаний при решении задач.

Задание: 1. Выполнить тест.

Критерии оценки: «5»- верно выполнены все 14-15заданий; «4» - верно выполнены 10-13 заданий; «3»- верно выполнено 8-9 заданий; «2»- выполнено менее 7 заданий.

Методические указания: используй методические указания самостоятельных работ по темам: «Матрицы», «Вычисление определителей», «Операции с матрицами»

Тест. 1. Дана матрица А = $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$. Чему равен элемент матрицы a_{23}?

1)6
2)-5
3)3
4)1

2. Определите размер матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -5 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

1) $A_{6\times 3}$
2) $A_{3\times 6}$
3) A_{18}
4) A_9

3. Какая из матриц является диагональной?

1) А= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 2) А= $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; 3) А= $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) А= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Как называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали – единицы?

1) единичной
2)нулевой
3)вектор-строка
4)вектор-столбец

5. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы А = $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix}$

1) А = $\begin{pmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; 2) А = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -7 & -5 & 0 \end{pmatrix}$; 3) А = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$; 4) А = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$

6. Найдите определитель матрицы А = $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1)10
2)14
3)-14
4)6

7. Найдите алгебраическое дополнение A_{31} матрицы А = $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1)-5
2)13
3)3
4) 5

8. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите 4A-B

1) $\begin{pmatrix} 11 & -2 & 32 \\ -12 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 13 & -2 & -32 \\ -4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 13 & -2 & 32 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

9. Выберите неверное утверждение:
1)При транспонировании значение определителя матрицы не меняется
2)Определитель единичной матрицы равен единицы
3)Определитель матрицы с двумя равными строками (столбцами) не равен нулю
4)Определитель матрицы, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю

10. Выберите верное утверждение:
1)Если поменять местами две строки (столбца) матрицы, то определить матрицы не поменяет знак
2)Для матрицы первого порядка значение определителя равно значению элемента этой матрицы
3)Определитель матрицы равен сумме элементов строки определителя на их алгебраические дополнения
4) Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки определителя на их миноры

11. Найдите произведение матриц A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

4) данная операция не выполнима

12. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и матрица B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. Найдите произведение матриц AB и BA

1) AB = $\begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ и BA = $\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

2) AB = BA = $\begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

3)AB = BA = $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

4) AB = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$ и BA = $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$

13. Найдите обратную матрицу к матрице A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ -0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

14. Решите систему уравнений методом Крамера $\begin{cases} y - 3z = 8 \\ -2x + 2y + 2z = 10 \\ 4x - 6y + 4z = 2 \end{cases}$

1) x = 65, y = 79, z = -19
2) x = 316, y = 260, z = 76
3) x = 79, y = 65, z = 19
4)Решения нет

15. Какой размерности будет матрица С = А·В^{T}, если матрица $A_{3\times3}$= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, а матрица $B_{2\times3}$ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) $C_{3\times3}$
2) $C_{3\times2}$
3) $C_{2\times3}$
4)данная операция не выполнима, размерность определить нельзя

Форма работы: ответы теста оформить в таблицу. Решение письменно в тетради, ниже таблицы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Контрольные вопросы:

1.Что такое матрица? Какой бывает матрица?
2.Что такое ранг матрицы? Как определить ранг матрицы?

РАЗДЕЛ 3.ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ТЕМА 3.1.ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Самостоятельная работа по теме «Задачи теории вероятностей»

Цель: закрепление знаний изученного материала. Использовать изученные формулы при решении задач и упражнений.

Задание: 1. Решить задачи . 2 варианта, по 5 заданий в каждом.

Критерии оценки: «5» верно выполнены все 5заданий; «4» верно выполнены 4 задания; «3» верно выполнено 3 задания; «2» выполнено менее 2 заданий.

Методические указания: разобрать примеры решения задач

Задача 1 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет "дубль".

Решение. Каждый исход опыта можно представить как упорядоченную пару чисел (m,n), где m-число очков выпавших на первой кости, n-число очков на второй. Каждая из 6 граней одной игральной кости может выпасть с любой из 6 граней другой. Следовательно, всех элементарных исходов, равновозможных и взаимоисключающих друг друга, будет $n=6\cdot 6=36$.

Событие A- выпадение "дубля" - происходит тогда и только тогда, когда наступает один из исходов: (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6). Таким образом $m_A=6$.

Следовательно,

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Задача 2 Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Решение. Две последние цифры можно набрать числом способов, равным числу упорядоченных двухэлементных подмножеств у десятиэлементного множества $\{0,1,\ldots,9\}$. Это число способов равно A_{10}^2. Благоприятствует событию А (цифры набраны верно) только один исход. Поэтому

$$P(A)=\frac{1}{A_{30}^2}=\frac{1}{90}.$$

Задача 3 В подгруппе 13 студентов. Из них восемь учатся на хорошо и отлично. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 5 студентов учатся на хорошо и отлично.

Решение. Пусть A событие состоящее в том, что среди 9 отобранных учатся на хорошо и отлично 5 студентов; $n=C_{13}^9$- общее число случаев, по которым можно отобрать 9 из 13; $m_A=C_5^4\cdot C_8^5$- число случаев благоприятствующих событию A, так как среди отобранных 9, 5 отличников и 4 студента не являются отличниками. Вероятность события А будет

$$P(A)=\frac{m_A}{n};\quad P(A)=\frac{C_8^5\cdot C_5^4}{C_{13}^9}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot 4!}:\frac{13!}{4!\cdot 9!}=\frac{56}{143}.$$

Вариант 1.

1) В группе туристов 10 человек. С помощью жребия они выбирают четырёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

2) Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,9. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,88. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

3) В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОРР (в первый раз выпадает орёл, во второй и третий — решка).

4) Биатлонист 3 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

5) Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 24% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Вариант 2.

1) На борту самолёта 15 мест рядом с запасными выходами и 25 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир Б. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру Б. достанется удобное место, если всего в самолёте 400 мест.

2) Вероятность того, что новый пылесос в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,079. В некотором городе из 1000 проданных пылесосов в течение года в гарантийную мастерскую поступило 86 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

3) В группе туристов 25 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Н. полетит вторым рейсом вертолёта.

4) По отзывам покупателей Игорь оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,86. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

5) Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60% этих стекол, вторая – 40%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Фома работы: письменно в тетради

Ответы:

	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
Вариант 1	0,4	0,02	0,125	0,13	0,46
Вариант 2	0,1	0,007	0,2	0,028	0,024

ТЕМА 3.2 Математическая статистика

Самостоятельная работа по теме «Математическая статистика»

Цель: закрепление теоретических знаний изученного материала. Работа с литературой по математике

Задание: ответить письменно на вопросы по учебнику и дополнительным источникам.

Критерии оценки: «5» - вопросы раскрыты полностью, точно обозначены основные понятия и характеристики по теме; «4» - вопросы раскрыты, однако нет полного описания всех необходимых элементов; «3» - вопросы раскрыты не полно, присутствуют грубые ошибки, однако есть некоторое понимание раскрываемых понятий;«2» - ответы на вопросы отсутствует или в целом не верны.

Методические указания: используй учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И.Башмаков.- 4-е изд., стер.- М. : Издательский центр «Академия», 2017. - 256 с.Глава 11. « Элементы теории вероятностей и математической статистики»

Вопросы для самоконтроля

1. Чем занимается математическая статистика?

2. В чем состоит основная задача математической статистики?

3. Что такое генеральная совокупность?

4. Что называется выборочной совокупностью (выборкой)?

5. Что называется объемом совокупности?

6. В чем польза использования выборок?

7. Почему прибегают к выборочному исследованию при контроле качества ампул для инъекций? Лампочек? Телефонов? …

8. Результаты переписи населения, проводимой в стране, являются генеральной совокупностью или выборкой?

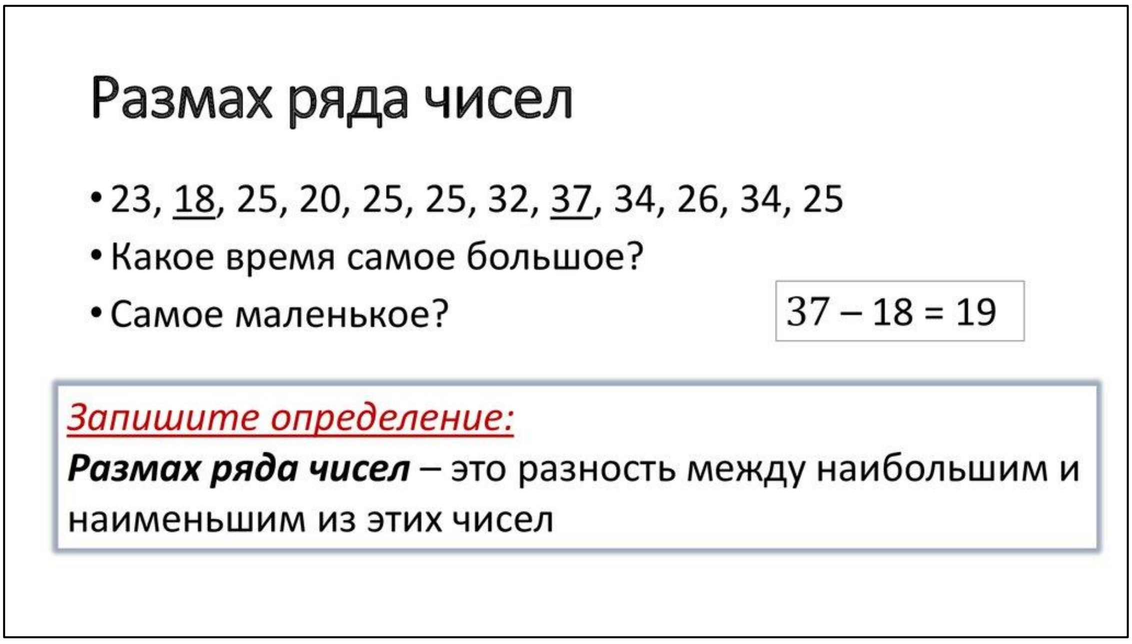
9. Какая выборка называется повторной (выборка с возвращением)?

10. Какая выборка называется бесповторной (выборка без возвращения)?

Фома работы: письменно в тетради

Самостоятельная работа по теме
«Математическая статистика»

Цель: закрепление знаний изученного материала по теме «Математическая статистика», применение изученных формулы при решении задач.
Задание: 1. Решить задачи.
Критерии оценки:
«5»- верно выполнены 4 задания;
«4»- верно выполнены 3 задания;
«3»- верно выполнено 2 задания;
«2»- выполнено менее 2 заданий.
Методические указания:



Среднее арифметическое ряда чисел

В таблице записаны результаты ежедневного измерения в полдень температуры воздуха (в градусах Цельсия) в течение 10 дней:

Число месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура	3	5	5	7	6	4	6	9	10	15

Средняя температура воздуха в полдень в первую декаду месяца:

$$T_{ср} = \frac{3+5+5+7+6+4+6+9+10+15}{10} = 7^{\circ}C$$

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Задания :

1) Найдите среднее арифметическое ряда чисел:

4, 7, 6, 1, 2, 8, 9, 11

а) 11; б) 8; в) 50; г) 6.

2) Найдите моду ряда чисел:

12, 13, 13, 15, 19, 13, 12, 14, 12, 14, 13.

а) 14; б) 13; в) 19; г) 12

3) Найдите размах ряда чисел:

293, 812, 90, 2, 373, 28, 28.

а) 810; б) 812; в) 2; г) 28.

4) В течение четверти ученица получила следующие отметки по алгебре:

2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5.

Какую статистическую характеристику ученица предпочла бы при выставлении четвертной отметки:

а) среднее арифметическое; б) мода; в) размах.

Фома работы: письменно в тетради.
Контрольные вопросы:
1. Что такое размах ряда чисел?
2. Что такое мода ряда чисел **?**
3. Что такое среднее арифметическое ряда чисел **?**

Раздел 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 4.1 Аналитическая геометрия на плоскости

Самостоятельная работа по теме «Аналитическая геометрия на плоскости»

Цель: закрепление знаний изученного материала. Использовать изученные формулы при решении задач и упражнений.

Задание: решить задачи. Всего 2 варианта.

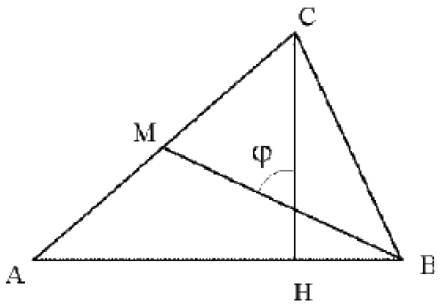
Критерии оценки: «5»- верно выполнены все 3 задания; «4»-верно выполнены 2 задания; «3» -верно выполнено 1 задание; «2» выполнено менее 1 задания.

Методические указания:

- **2**. Даны вершины треугольника $A(-2;0)$, $B(3;-1)$, $C(4;-2)$.

Составить: a) уравнение стороны AB и найти ее длину,
b) уравнение медианы BM и найти ее длину,
c) уравнение высоты CH и найти ее длину,
d) косинус угла между медианой BM и высотой CH.

Р е ш е н и е.



a) Для составления уравнения стороны AB воспользуемся уравнением прямой через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Longrightarrow \frac{x+2}{3+2}=\frac{y-0}{-1-0} \Longrightarrow$$

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y}{-1} \Longrightarrow x+5y+2=0.$$

Длину стороны AB найдем как расстояние между двумя точками:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}==\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$$

Вариант 1

Задача 1. Прямая на плоскости

Заданы координаты вершин некоторого треугольника ABC: $A(2;1)$, $B(-7;13)$, $C(-1;21)$.

Найти:

а) уравнение стороны BC;

б) уравнение высоты, проведенной из точки A;

в) уравнение медианы, проведенной из точки C;

г) уравнение биссектрисы внутреннего угла B.

Задача 2 Уравнение плоскости в пространстве

Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $M_0(-1;3;-5)$

а) параллельно плоскости $2x+y-3z-3=0$;

б) параллельно векторам $\overline{a}=(-1;1;0)$, $\overline{b}=(2;-1;1)$;

в) и точки $M_1(2;-1;3)$, $M_2(-4;1;2)$.

Задача 3 Уравнение прямой в пространстве

1) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2;-1;3)$

а) параллельно заданной прямой $L_0 \begin{cases} 2x+y-3z+1=0, \\ x-2y+z-2=0 \end{cases}$;

б) параллельно линии пересечения плоскостей

$$\alpha_1: x+y-2z-4=0,\ \alpha_2: -3x-2y+z+6=0,$$

2) Найти точку пересечения прямой, полученной в задании 1а) с плоскостью α_3 $5x+2y-3z-3=0$ и угол между этой прямой и плоскостью α_3.

Вариант 2

Задача 1. Прямая на плоскости

Заданы координаты вершин некоторого треугольника ABC: $A(3;3)$, $B(10;-21)$, $C(-2;-5)$.

Найти:

а) уравнение стороны BC;

б) уравнение высоты, проведенной из точки А;

в) уравнение медианы, проведенной из точки С;

г) уравнение биссектрисы внутреннего угла В.

Задача 2 Уравнение плоскости в пространстве

Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $M_0(2;0;4)$

а) параллельно плоскости $x-3y+5z-6=0$;

б) параллельно векторам $\bar{a}=(2;-3;1)$, $\bar{b}=(1;4;-2)$;

в) и точки $M_1(3;-2;4), M_2(0;3;1)$.

Задача 3 Уравнение прямой в пространстве

1) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(0;1;-1)$

а) параллельно заданной прямой $L_0\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$;

б) параллельно линии пересечения плоскостей

$$\alpha_1: x-2y+z=0,\ \alpha_2: 2x+y-z=2.$$

2) Найти точку пересечения прямой, полученной в задании 1а) с плоскостью $\alpha_3\ 2x-y-z+4=0$ и угол между этой прямой и плоскостью α_3.

Фома работы: подробное решение письменно в тетради.

Контрольные вопросы:

1. **Уравнение прямой на плоскости?**
2. **Уравнение прямой в пространстве?**

Самостоятельная работа по теме

«Элементы аналитической геометрии на плоскости», «Кривые второго порядка»

Цель: закрепление знаний изученного материала. Использовать изученные понятия и определения при выполнении задания.

Задание: выполнить тест. Всего 2 варианта, по 32 задания.

Критерии оценки: «5»- верно выполнены 30-32 задания; «4» - верно выполнены 24-31 задания; «3» - верно выполнены 16-23 заданий; «2» выполнено менее 15 заданий.

Методические указания: повтори определения

Вектор – направленный отрезок.

Обозначение $\overline{a} = \overline{AB}$.

Длина вектора – длина отрезка *AB*.

Обозначение длины

$\overline{a} = \left|\overline{AB}\right|$ или $a = \left|\overline{a}\right|$.

Коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой.

Обозначения:

$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ – векторы сонаправлены;

$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ – векторы противоположно направлены;

$\overline{a} \parallel \overline{b}$ – в общем случае (без указания взаимной направленности).

Равные векторы – векторы, удовлетворяющие условиям :

1) имеют одинаковую длину;
2) коллинеарны;
3) сонаправлены.

Компланарные векторы — векторы, параллельные одной плоскости.

Два неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют **базис на плоскости**.

Три некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют **базис в пространстве**.

Ортонормированный (**декартовый**) базис – это базис составляющие векторы которого взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

Будем обозначать декартовый базис на плоскости $\overline{i}$ $\overline{j}$; в пространстве $\overline{i}$ $\overline{j}$ $\overline{k}$;

Линейным операциям над векторами

$\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$

1. $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
2. $\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
3. $\lambda \bar{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$

Если заданы координаты начала и конца вектора

$A = (x_1; x_2; x_3)$ и $B = (y_1; y_2; y_3)$

тогда координаты вектора вычисляются:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; y_3 - x_3)$$

Скалярным произведением векторов называют сумму произведений их координат:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Скалярным произведением векторов называют произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\alpha)$$

Скалярное произведение векторов можно еще представить:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}} \bar{b} \qquad \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}} \bar{a}$$

где $np_{\bar{a}} \bar{b}$ проекция вектора **a** на вектор **b**.

С помощью скалярного произведения можно вычислить:

Длину вектора:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Расстояние между двумя точками:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Косинус угла между двумя векторами:

$$\cos(\alpha) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Фома работы: заполнить правильными ответами «Бланк ответов теста».

Тест. Вариант 1.

1. Вектором называется:
А) направленный луч;
Б) направленный отрезок;
В) направленный промежуток.

2. Два вектора называются коллинеарными, если:
А) они лежат на перпендикулярных прямых;
Б) они лежат не на одной прямой;
В) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

3. Два ненулевых вектора могут быть:
А) сонаправленными или противоположно направленными;
Б) симметричными и противоположно направленными;
В) соразмерными и противоположно направленными.

4. Два вектора называются равными, если:
А) они совмещаются поворотом;
Б) они совмещаются с помощью симметрии;

В) они совмещаются параллельным переносом.

5. Сложение ненулевых векторов можно выполнить по правилу:

А) треугольника, параллелограмма, многоугольника;

Б) треугольника, прямоугольника, многоугольника;

В) треугольника, трапеции, многоугольника.

6. Вектор называется единичным, если:

А) его направление совпадает с направлением оси;

Б) имеет длину и совпадает с направлением оси;

В) имеет длину, равную единице, и направление, совпадающее с направлением оси.

7. Углом между двумя ненулевыми векторами называется угол

А) между осями;

Б) между направлениями этих векторов и имеет градусную меру больше 0, но меньше 180 градусов;

В) между направлениями этих векторов и имеет градусную меру больше 90, но меньше 180 градусов.

8. Углом между ненулевым вектором и осью называется угол

А) между осями;

Б) между направлением оси и вектора и имеет градусную меру больше 90, но меньше 180 градусов;

В) между направлением оси и вектора и имеет градусную меру больше 0, но меньше 180 градусов.

9. Прямоугольным базисом называется:

А) пара единичных взаимно перпендикулярных векторов i и j;

Б) пара единичных векторов i и j, отложенных от некоторого начала – точки О;

В) пара единичных взаимно перпендикулярных векторов i и j, отложенных от некоторого начала – точки О.

10. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется:

А) вектор, равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;

Б) число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;

В) число, равное сумме длин этих векторов на косинус угла между ними.

11. Скалярное произведение в координатах равно:

А) сумме соответствующих координат векторов;

Б) разности соответствующих координат векторов;

В) произведению соответствующих координат векторов.

12. Расстояние между двумя точками вычисляется по формуле:

А) $d = \sqrt{} (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2$;

Б) $d = \sqrt{} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$;

В) $d = \sqrt{} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

13. Уравнение x = a, это:

А) уравнение оси Ох;

Б) уравнение прямой, параллельной оси Ох;

В) уравнение прямой, параллельной оси Оу.

14. Уравнение y = 0, это:

А) уравнение оси Ох;

Б) уравнение прямой, параллельной оси Ох;

В) уравнение прямой, параллельной оси Оу.

15. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид:

А) $y = kx + b$;

Б) $y = kx$;

В) $y = kx + 2b$.

16. Окружностью называется:
А) геометрическое место точек;
Б) геометрическое место точек, удаленных от центра;
В) геометрическое место точек, одинаково удаленных от центра.
17. Уравнение окружности с центром в произвольной точке имеет вид:
А) $(x – a)^2 + (y – в)^2 = R^2$;
Б) $(x + a)^2 + (y + в)^2 = R^2$;
В) $(x – a)^2 - (y – в)^2 = R^2$.
18. Эллипсом называется
А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).
19. Гиперболой называется
А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).
20. Параболой называется
А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;
В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).
21. Фокусами называются
А) точки, лежащие на оси Оу на заданном расстоянии от начала координат;
Б) точки, лежащие на оси Ох на заданном расстоянии от начала координат;
В) точки, лежащие на заданном расстоянии от начала координат.
22. Не имеет центра симметрии:
А) эллипс;
Б) гипербола;
В) парабола.
23. Уравнение эллипса имеет вид:
А) $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{в^2} = 1$;
Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$;
В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$.
24. Уравнение параболы имеет вид:
А) $y^2 = 2px$;
Б) $y = 2px$;
В) $y^2 = px$.
25. Уравнение гиперболы имеет вид:

А) $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{в^2} = 1$;

Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$;

В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$.

26. Парабола имеет:

А) две оси симметрии;

Б) одну ось симметрии;

В) три оси симметрии.

27. Эксцентриситетом эллипса е, где 0 < е < 1 называется

А) величина е = - $\frac{a}{c}$;

Б) величина е = - $\frac{c}{в}$;

В) величина е = - $\frac{c}{a}$.

28. Вершиной параболы называется

А) точка пересечения оси параболы с кривой;

Б) точка пересечения оси параболы с директрисой;

В) точка пересечения фокуса с кривой.

29. Центром эллипса является:

А) вершина эллипса;

Б) фокус эллипса;

В) центр симметрии эллипса.

30. Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид:

А) $(x – a)^2 + (y – в)^2 = R^2$;

Б) $x^2 + y^2 = R^2$;

В) $x^2 - y^2 = R^2$.

31. Гипербола имеет:

А) действительную и мнимую оси;

Б) только действительную ось;

В) только мнимую ось.

32. Эллипс имеет:

А) только большую ось;

Б) только малую ось;

В) большую и малую ось.

Вариант 2

1.Вектором называется:

А) направленный луч;

Б) направленный отрезок;

В) направленный промежуток.

2. Два вектора называются равными, если:

А) они совмещаются поворотом;

Б) они совмещаются с помощью симметрии;

В) они совмещаются параллельным переносом.

3. Сложение ненулевых векторов можно выполнить по правилу:

А) треугольника, параллелограмма, многоугольника;
Б) треугольника, прямоугольника, многоугольника;
В) треугольника, трапеции, многоугольника.
4. Углом между двумя ненулевыми векторами называется угол
А) между осями;
Б) между направлениями этих векторов и имеет градусную меру больше 0, но меньше 180 градусов;
В) между направлениями этих векторов и имеет градусную меру больше 90, но меньше 180 градусов.
5. Два вектора называются коллинеарными, если:
А) они лежат на перпендикулярных прямых;
Б) они лежат не на одной прямой;
В) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
6. Два ненулевых вектора могут быть:
А) сонаправленными или противоположно направленными;
Б) симметричными и противоположно направленными;
В) соразмерными и противоположно направленными.
7. Вектор называется единичным, если:
А) его направление совпадает с направлением оси;
Б) имеет длину и совпадает с направлением оси;
В) имеет длину, равную единице, и направление, совпадающее с направлением оси.
8. Прямоугольным базисом называется:
А) пара единичных взаимно перпендикулярных векторов i и j;
Б) пара единичных векторов i и j, отложенных от некоторого начала – точки О;
В) пара единичных взаимно перпендикулярных векторов i и j, отложенных от некоторого начала – точки О.
9. Углом между ненулевым вектором и осью называется угол
А) между осями;
Б) между направлением оси и вектора и имеет градусную меру больше 90, но меньше 180 градусов;
В) между направлением оси и вектора и имеет градусную меру больше 0, но меньше 180 градусов.
10. Скалярное произведение в координатах равно:
А) сумме соответствующих координат векторов;
Б) разности соответствующих координат векторов;
В) произведению соответствующих координат векторов.
11. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется:
А) вектор, равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;
Б) число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;
В) число, равное сумме длин этих векторов на косинус угла между ними.
12. Уравнение x = a, это:
А) уравнение оси Ох;
Б) уравнение прямой, параллельной оси Ох;
В) уравнение прямой, параллельной оси Оу.
13. Уравнение y = 0, это:
А) уравнение оси Ох;
Б) уравнение прямой, параллельной оси Ох;
В) уравнение прямой, параллельной оси Оу.
14. Расстояние между двумя точками вычисляется по формуле:
А) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$;

Б) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

В) $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

15. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид:

А) $y = kx + b$;

Б) $y = kx$;

В) $y = kx + 2b$.

16. Уравнение окружности с центром в произвольной точке имеет вид:

А) $(x - a)^2 + (y - в)^2 = R^2$;

Б) $(x + a)^2 + (y + в)^2 = R^2$;

В) $(x - a)^2 - (y - в)^2 = R^2$.

17. Фокусами называются

А) точки, лежащие на оси Оу на заданном расстоянии от начала координат;

Б) точки, лежащие на оси Ох на заданном расстоянии от начала координат;

В) точки, лежащие на заданном расстоянии от начала координат.

18. Не имеет центра симметрии:

А) эллипс;

Б) гипербола;

В) парабола.

19. Эллипсом называется

А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

20. Гиперболой называется

А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

21. Параболой называется

А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

22. Уравнение эллипса имеет вид:

А) $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{в^2} = 1$;

Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$;

В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$.

23. Уравнение параболы имеет вид:

А) $y^2 = 2px$;

Б) $y = 2px$;

В) $y^2 = px$.

24. Уравнение гиперболы имеет вид:

А) $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{в^2} = 1$;

Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$;

В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$.

25. Вершиной параболы называется

А) точка пересечения оси параболы с кривой;

Б) точка пересечения оси параболы с директрисой;

В) точка пересечения фокуса с кривой.

26. Центром эллипса является:

А) вершина эллипса;

Б) фокус эллипса;

В) центр симметрии эллипса.

27. Парабола имеет:

А) две оси симметрии;

Б) одну ось симметрии;

В) три оси симметрии.

28. Эксцентриситетом эллипса е, где 0 < е < 1 называется

А) величина $е = -\frac{a}{c}$;

Б) величина $е = -\frac{c}{в}$;

В) величина $е = -\frac{c}{a}$.

29. Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид:

А) $(x - a)^2 + (y - в)^2 = R^2$;

Б) $x^2 + y^2 = R^2$;

В) $x^2 - y^2 = R^2$.

30. Эллипс имеет:

А) только большую ось;

Б) только малую ось;

В) большую и малую ось.

31. Гипербола имеет:

А) действительную и мнимую оси;

Б) только действительную ось;

В) только мнимую ось.

32. Окружностью называется:

А) геометрическое место точек;

Б) геометрическое место точек, удаленных от центра;

В) геометрическое место точек, одинаково удаленных от центра.

Бланк ответов теста, вариант №1 **Бланк ответов теста, вариант №2**

1.	А	Б	В		1.	А	Б	В
2.	А	Б	В		2.	А	Б	В
3.	А	Б	В		3.	А	Б	В
4.	А	Б	В		4.	А	Б	В
5.	А	Б	В		5.	А	Б	В
6.	А	Б	В		6.	А	Б	В
7.	А	Б	В		7.	А	Б	В
8.	А	Б	В		8.	А	Б	В
9.	А	Б	В		9.	А	Б	В
10.	А	Б	В		10.	А	Б	В
11.	А	Б	В		11.	А	Б	В
12.	А	Б	В		12.	А	Б	В
13.	А	Б	В		13.	А	Б	В
14.	А	Б	В		14.	А	Б	В
15.	А	Б	В		15.	А	Б	В
16.	А	Б	В		16.	А	Б	В
17.	А	Б	В		17.	А	Б	В
18.	А	Б	В		18.	А	Б	В
19.	А	Б	В		19.	А	Б	В
20.	А	Б	В		20.	А	Б	В
21.	А	Б	В		21.	А	Б	В
22.	А	Б	В		22.	А	Б	В
23.	А	Б	В		23.	А	Б	В
24.	А	Б	В		24.	А	Б	В
25.	А	Б	В		25.	А	Б	В
26.	А	Б	В		26.	А	Б	В
27.	А	Б	В		27.	А	Б	В
28.	А	Б	В		28.	А	Б	В
29.	А	Б	В		29.	А	Б	В
30.	А	Б	В		30.	А	Б	В
31.	А	Б	В		31.	А	Б	В
32.	А	Б	В		32.	А	Б	В

Самостоятельная работа по теме
«Кривые второго порядка»

Цель: приводить уравнения линий второго порядка к простейшему (каноническому) виду путем преобразования систем координат ; строить данную линию по ее каноническому уравнению.
Задание: построить графики функций. Всего 22 варианта, по 4 задания.
Критерии оценки: «5» верно выполнены все задания; «4» - верно выполнены 3 задания; «3» - верно выполнены 2 задания; «2» выполнено менее 1 задания.
Методические указания:

1. Кривые второго порядка

1.1. Кривые, заданные в декартовых координатах

Линия первого порядка на плоскости определяется алгебраическим уравнением первой степени относительно декартовых координат x и y:

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) определяет прямую на плоскости.

Линия второго порядка на плоскости определяется алгебраическим уравнением второй степени относительно переменных x и y:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{2}$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю.

Уравнение (2) определяет кривую линию, которая называется кривой второго порядка. Это может быть окружность, эллипс, гипербола, парабола и их вырождения.

В аналитической геометрии всякая кривая определяется как геометрическое место точек.

Рассмотрим кривые второго порядка.

Окружность

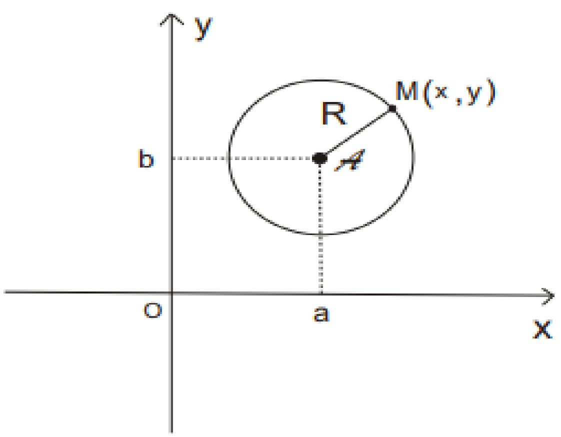


Рис. 1

Определение 1.1. *Окружностью называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, расстояние которых до данной точки $A(a, b)$ этой плоскости (называемой центром этой окружности) есть величина постоянная R (называемая радиусом этой окружности) (рис. 1).*

Уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

При $a = b = 0$ получим уравнение окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$. При $R = 0$ данные окружности вырождаются в точки с координатами соответственно (a, b) и $(0, 0)$.

Эллипс

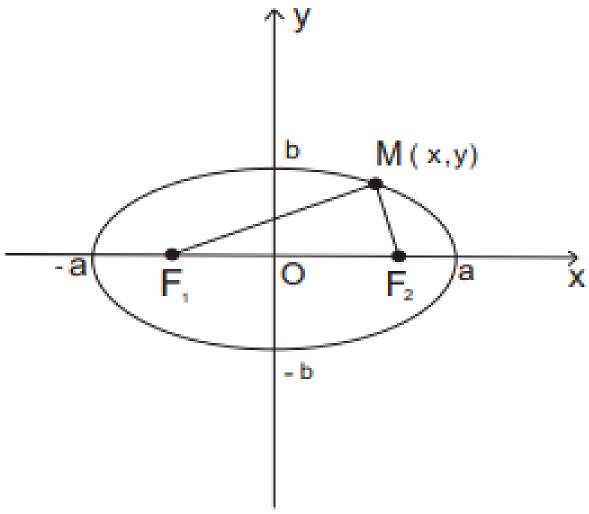


Рис. 2

Определение 1.2. *Эллипсом называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости (называемых фокусами этого эллипса) есть величина постоянная (рис. 2).*

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется каноническим уравнением эллипса, где a — большая полуось, b — малая полуось эллипса.

Выраждения эллипса:

1) уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ определяет мнимый эллипс;

Гипербола

Определение 1.3. *Гиперболой называется геометрическое место точек $M(x,y)$ плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости (называемых фокусами этой гиперболы) есть величина постоянная (рис. 3).*

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ называется каноническим уравнением гиперболы, где a — действительная ось, b — мнимая ось гиперболы.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ представляет сопряжённую с данной гиперболу.

Вырождения гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ или $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$. Имеем пару пересекающихся прямых: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ и $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}$.

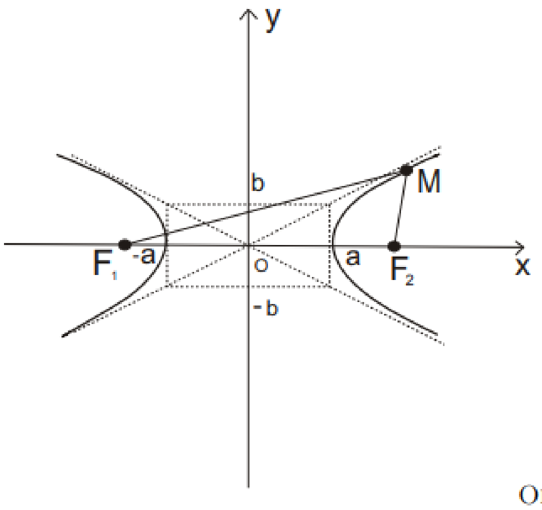


Рис. 3

Парабола

Определение 1.4. *Параболой называется геометрическое место точек $M(x,y)$ плоскости, равноотстоящих от данной точки F этой плоскости (называемой фокусом) и данной прямой (называемой директрисой параболы), предполагая, что на ней не лежит эта точка F (рис. 4).*

Уравнение $y^2=2px$ называется каноническим уравнением параболы, где p ($p>0$) — параметр параболы.

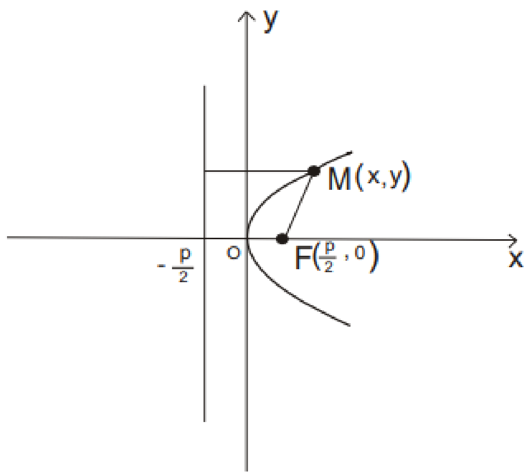


Рис. 4

Уравнение $x^2=2py$ определяет параболу, симметричную относительно оси Oy.

Вырождения параболы: при $p=0$ получим:

1) уравнение $y^2=0$, которое определяет дважды совмещённую ось Ox;

2) $x^2=0$ есть дважды совмещённая ось Oy.

Пример решения задачи

Задача. *Привести к каноническому виду уравнение кривой 2 порядка, найти все ее параметры, построить кривую.*

$9x^2-4y^2-90x-8y+185=0$

Решение. Приведем уравнение кривой к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$\begin{aligned}
&9x^2-4y^2-90x-8y+185=0,\\
&9(x^2-10x)-4(y^2+2y)+185=0,\\
&9(x^2-10x+25)-4(y^2+2y+1)=-185+225-4,\\
&9(x-5)^2-4(y+1)^2=36,\\
&\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1,\\
&\frac{(x-5)^2}{2^2}-\frac{(y+1)^2}{3^2}=1.
\end{aligned}$$

Получили каноническое уравнение гиперболы $\frac{(x-5)^2}{2^2}-\frac{(y+1)^2}{3^2}=1$ с центром в точке $O(5;-1)$ и полуосями $a=2$, $b=3$.

Асимптоты гиперболы:

$$\begin{aligned}
&y+1=\pm\frac{b}{a}(x-5),\\
&y=\pm\frac{3}{2}(x-5)-1.
\end{aligned}$$

Параметр c: $c^2=a^2+b^2=4+9=13$, $c=\sqrt{13}$.

Тогда фокусы гиперболы расположены в точках:

$F_1(c+5,-1) = F_1\left(\sqrt{13}+5,-1\right)$ и $F_2(-c+5,-1) = F_2\left(-\sqrt{13}+5,-1\right)$.

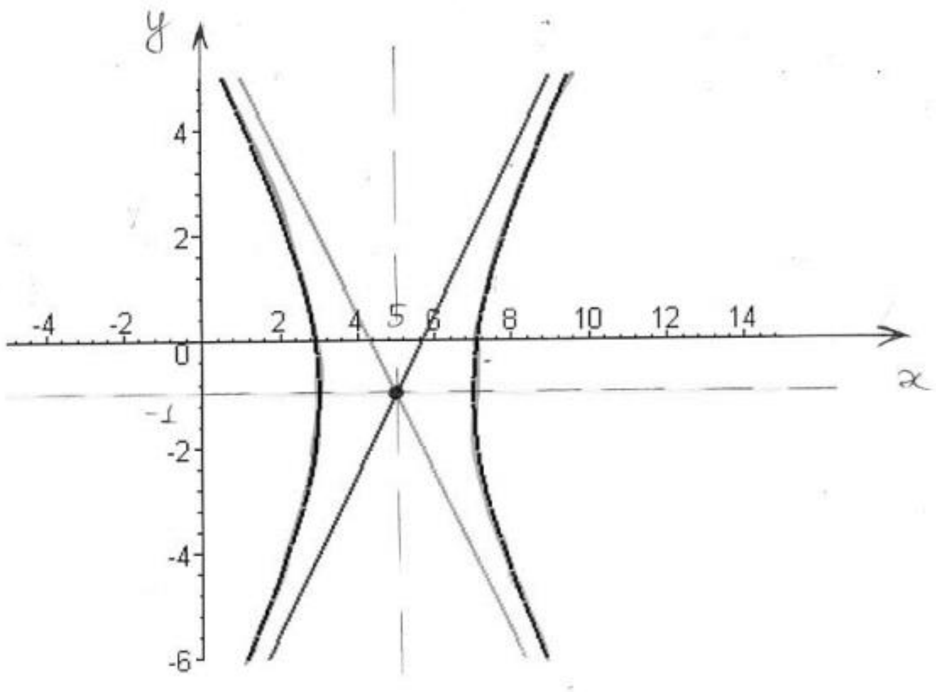
Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}8 > 1$.

Директрисы гиперболы:

$$x - 5 = \pm\frac{a}{\varepsilon},$$
$$x = \pm\frac{4}{\sqrt{13}} + 5.$$

Сделаем чертеж. Начертим гиперболу и ее асимптоты, отметим центр

$O(5;-1)$



Задание 1.

Построить кривые следующих уравнений:

1.1.
1. $x^2 - 2x + y^2 - 4x = 4.$
2. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0.$
3. $5x^2 - 10y^2 - 50 = 0.$
4. $6x^2 - 3y = 0.$

1.2.
1. $x^2 - 8x + y^2 - 4y - 7 = 0.$
2. $x^2 + 5y^2 - 20 = 0.$
3. $7x^2 - 2y^2 - 14 = 0.$
4. $3y^2 - 9x = 0.$

1.3.
1. $x^2 + y^2 - 5x = 0.$
2. $2x^2 + 3y^2 + 12 = 0.$
3. $4x^2 - y^2 - 6 = 0.$
4. $5x^2 - 3y = 0.$

1.4.
1. $x^2 + y^2 - 7y = 0.$
2. $x^2 + 5y^2 - 10 = 0.$
3. $5x^2 - 10y^2 + 10 = 0.$
4. $x^2 - 8y = 0.$

1.5.
1. $x^2 - 3x + y^2 - 5y = 0.$
2. $3x^2 + 5y^2 = 60.$
3. $4x^2 - 8y^2 - 32 = 0.$
4. $9y^2 + 5x = 0.$

1.6.
1. $x^2 + 8x + y^2 + 2y - 17 = 0.$
2. $5x^2 + 15y^2 = 3.$
3. $x^2 - 2y^2 + 3 = 0.$
4. $3y - 5x^2 = 0.$

1.7.
1. $x^2 - 7x + y^2 - 8y = 30.$
2. $3x^2 + 7y^2 = 21.$
3. $5x^2 - 6y^2 = 0.$
4. $7x - 9y^2 = 0.$

1.8.
1. $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 13 = 0.$
2. $5x^2 + 7y^2 + 35 = 0.$
3. $2x^2 - 4y^2 - 8 = 0.$
4. $2x^2 - 3y = 0.$

1.9.
1. $x^2 - 5x + y^2 - 6y = 10.$
2. $3x^2 + 4y^2 - 24 = 0.$
3. $4x^2 - 7y^2 - 28 = 0.$
4. $8y - 5x^2 = 0.$

1.10.
1. $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 11.$
2. $2x^2 + 7y^2 - 14 = 0.$
3. $5x^2 - 8y^2 - 40 = 0.$
4. $9x - 5y^2 = 0.$

1.11.
1. $x^2 - 3x + y^2 - 5x = 5.$
2. $4x^2 + 5y^2 - 13 = 0.$
3. $6x^2 - 11y^2 - 60 = 0.$
4. $7x^2 - 4y = 0.$

1.12.
1. $x^2 - 9x + y^2 - 5y - 8 = 0.$
2. $x^2 - 6y^2 - 30 = 0.$
3. $8x^2 - 3y^2 - 23 = 0.$
4. $4y^2 - 8x = 0.$

Фома работы: письменно в тетради

Контрольные вопросы:

1.Вывести каноническое уравнение параболы

2.Вывести уравнение окружности.

3.Вывести каноническое уравнение эллипса

Самостоятельная работа « Итоговая работа по математике»

Цель: проверить сформированность знаний, умений, навыков обучающихся; выявить уровень математической подготовки для определения уровня обученности по дисциплине: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия обучающихся 2 курса.
Задание: выполнить задания итоговой работы. Всего 2 варианта. Провести проверку по модельным ответам, проанализировать допущенные ошибки.
Критерии оценки : «5» верно выполнены все 10 заданий; «4» верно выполнены 8-9 заданий; «3» верно выполнены 5-7 заданий; «2» выполнено менее 5 заданий
Методические указания: используй конспекты лекций, справочные материалы, учебники.

I вариант

1. Определи, какова вероятность, что случайно названное двузначное число делится на 26 ? Запиши **сокращённую** дробь! Определи, какова вероятность, что случайно названное двузначное число не делится на 26 ? Запиши **сокращённую** дробь!

2. Дана функция $-9x^7+3x+6$. Вычислите её производную.

   1) $-63x^6+3$ 2) $63x^6+3$ 3) $-63x^6+3x$ 4) $-63x^6+3+6$

3. Вычислите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=9\sin x+2x$ в точке с абсциссой $x_0=-\pi/2$.
   1) 6 2) 8 3) -4 4) 2
4. Периметр прямоугольника составляет 84 см. Найдите каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?
   1) 22 2) 20 3) 21 4) 23
5. Напиши уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+4x+8$ в точке с абсциссой $x_0=2$.
6. Вычислите точки экстремума заданной функции и исследуй их характер: $y=2x-4\cos x$, $x\in[-\pi/2;\pi]$
7. Дана функция $f(x)=2x^4+2x^5$. Запишите общий вид первообразных функции.

   1)$0,4x^5+1/3x^6+c$ 2) $2x^5+2x^6+c$ 3) $8x^5+10x^6$ 4) $10x^5+12x^6+c$

8. Найди площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)=3x^2$, прямыми $y=0$, $x=2$ и $x=6$.
   1) 210 2) 60 3) 208 4) 130
9. Реши иррациональное уравнение: $x+\sqrt{18+x^2}=3$
   1) 2 2) 1 3) 1,5 4) -1,5
10. Реши систему уравнений. $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}} x-\log_{\frac{1}{3}} y=-2\\ y^2-x=10\end{cases}$
    1) (90; 10) 2) (9; 1) 3) (9; 99) 4) (80; 10)

II вариант

1. Определи, какова вероятность, что случайно названное двузначное число делится на 29 ? Запиши **сокращённую** дробь! Определи, какова вероятность, что случайно названное двузначное число не делится на 29 ? Запиши **сокращённую** дробь!
2. Дана функция $5x^8+4x-5$. Вычислите её производную.

   1) $-40x^7+4$ 2) $40x^7+4$ 3) $40x^7+4x$ 4) $40x7+4-5$
3. Вычислите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=14\sin x+7x$ в точке с абсциссой $x_0=\pi/2$.

   1) 16 2) 7 3) -16 4) 4
4. Периметр прямоугольника составляет 40 см. Определите каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

   1) 10 2) 11 3) 12 4) 9
5. Напиши уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+5x+5$ в точке с абсциссой $x_0=2$.
6. Вычислите точки экстремума заданной функции и укажи их характер: $y=\sqrt{3}\,x-2\cos x$, $x\in[-\pi/2;\pi]$
7. Дана функция $f(x)=3x^4-5x^6$. Запишите общий вид первообразных функции.

   1) x^3-x^5+c 2) $0,6x^5-5/7x^7+c$ 3) $3/4x^5-5/6x^7+c$ 4) $3x^4-5x^6+c$
8. Определи площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)=6x^2$, прямыми $y=0$, $x=3$ и $x=7$.

   1) 348 2) 480 3) 632 4) 394
9. Реши иррациональное уравнение: $x+\sqrt{4+x^2}=2$

   1) -2 2) 1 3) 2 4) 0
10. Реши систему уравнений. $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x-\log_{\frac{1}{3}}y=-1\\ y^2-x=4\end{cases}$

    1) (4; 12) 2) (-12; -4) 3) (-1; -3) 4) (12;4)

Модельные ответы:

№	Вариант 1	Вариант 2
1	$\frac{1}{30}$; $\frac{29}{30}$	$\frac{1}{30}$; $\frac{29}{30}$
2	1	2
3	4	2
4	3	1
5	y=8x+4	y=9x+1
6	$X_{min}=\frac{\pi}{6}$	$X_{min}=\frac{\pi}{3}$
7	1	2
8	3	3
9	3	4
10	1	1

Литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И.Башмаков.- 4-е изд., стер.- М. : Издательский центр «Академия», 2017. -256 с.

2.Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Задачник : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И.Башмаков.- М. : Издательский центр «Академия», 2017. -416с.

3.Богомолов Н. В. Математика: Учеб. для ссузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - М : Дрофа, 2002. - 400 с.: ил.

4.Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для средних спец. учеб. заведений/ Н. В. Богомолов. – 6-е изд., стер.- М : Высш. шк., 2014. - 495 с.

5.Богомолов, Н. В. Сборник дидактических заданий по математике:учеб. пособие для ссузов./ Н. В. Богомолов, Л. Ю. Сергиенко. -4-е изд., стереотип. М. : Дрофа, 2014. – 236, [4] с.ил.

Дополнительная:

1.Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: учеб.для 10-11кл. ср. шк./Москва: Просвещение 2010-319с.

2.Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа: учеб.для 10-11кл. ср. шк./Москва: Мнемозина 2013-375с.

Интернет-ресурсы:

1. http://www.bookomama.ru/uchebniki-i-posobij/posobij/1861-matematika-srednee-professional-noe-obrazovanie-n-v-bogomol.html
2. http://currencyex.ru/knigi/novinki/4272-sbornik-zadach-po-matematike-n-v-bogomolov.html
3. http://www.eeeppp.ru/hudozhestvennwe/1965-reshebnik-po-matematike-bogomolov.html
4. http://selectme.ru/uchebniki-i-posobij/3105-matematika-srednee-professional-noe-obrazovanie-n-v-bogomol.html
5. http://www.gofuckit.ru/biblioteka/elektronnwe/3105-bogomolov-prakticheskie-zanjtij-po-matematike.html